Interrogation 2
Lundi 30 septembre 2024

NOM et Prénom ....

Cours

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur cet espace.
Définition et condition suffisante d'existence de $\text{Cov}(X, Y)$. Formule de Koenig-Huygens pour la covariance.

- **Définition.** Sous réserve d'existence :
$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\right)$$
- **Condition suffisante d'existence.** Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y)$ existe.
- **Formule de Koenig-Huygens pour la covariance.**
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :
$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Exercice 1

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur cet espace telles que :

- X suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$)
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et p (avec $p \in]0; 1[$).

1. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ la valeur de $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big)$.
Indication : distinguer deux cas...
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et p. D'où :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \begin{cases} \dbinom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0; n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \begin{cases} \dbinom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0; n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$.

2. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}\big([Y = k]\big)$. Quelle est la loi de Y ?
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = k]\big)$ est convergente et :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y = k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = k]\big) && \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) && \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = 0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) && X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda),\ \forall n \in [\![k; +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} p^{n-k} && j = n - k \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{j!} (1-p)^j
\end{aligned}$$

$$= \frac{p^k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^j}{j!}$$

somme d'une série exponentielle

$$= \frac{p^k \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

Conclusion : Y suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'ensemble $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$. Démontrer que F est un espace vectoriel.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Par définition : $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- La matrice nulle commute avec A, donc $0_n \in F$: F est non vide.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in F$.
  - ⋆ On a déjà $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda MA + \mu NA \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned}$$

$M \in F$, donc $AM = MA$; et $N \in F$, donc $AN = NA$

Par conséquent :

$$\lambda M + \mu N \in F$$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc F est un espace vectoriel.

Exercice 3

1. Sans utiliser la commande **rd.binomial**, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **binomiale(n,p)** renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n; p)$.

```python
import numpy.random as rd

def binomiale(n,p):
    nb_succes=0
    for k in range(n): #ou range(0,n)
        if rd.random()<p:
            nb_succes+=1 #ou nb_succes=nb_succes+1
    return nb_succes
```

2. Sans utiliser la commande **rd.geometric**, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **geometrique(p)** renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{G}(p)$.

```python
import numpy.random as rd

def geometrique(p):
    rang=1
    while rd.random()<1-p: #ou while rd.random()>p
        rang+=1
    return rang
```