Interrogation 3
Lundi 7 octobre 2024

NOM et Prénom ....

Cours

Soient E un espace vectoriel et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. **Définition (quantifiée et en français).** La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E lorsque :
   - $\forall \vec{u} \in E,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$;
   - tout vecteur de E se décompose en combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
2. **Définition (quantifiée et en français).** La famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est libre dans E lorsque :
   - $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k = \vec{0_E} \implies (\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k = 0) \right)$;
   - la seule combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ égale au vecteur nul est la combinaison linéaire triviale (dont tous les coefficients sont nuls).
3. Quel est le nom donné à $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$? Que représente-t-il ?
   - $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
   - $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, c'est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ est libre.

   Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $a \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + c \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$.

   On a :

$$a \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + c \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b = 0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} a+\ b+c=0 \\ -c=0 \\ \ -2b =0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

   D'où : $a = b = c = 0$.

   Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ est :
   - ✓ libre d'après ce qui précède,
   - ✓ de cardinal 3 égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

   Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ainsi que l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\}$.
Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \begin{cases} 3x + \ \ y + \ \ z = 2x \\ \ \ x + 3y + \ \ z = 2y \\ \ \ x + \ \ y + 3z = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = \quad y \\ z = \quad z \end{cases} \end{aligned}$$

D'où : $F = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Or $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

- ✓ génératrice de F par définition,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une base ; et $\dim(F) = 2$.

Exercice 2

On place n boules numérotées de 1 à n dans n boites numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boite pouvant donc contenir plusieurs boules).
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne numéro i et $N = \max(N_1, N_2, \ldots, N_n)$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant en sortie une réalisation de la variable aléatoire N.

```python
import numpy.random as rd

def simulN(n):
    L=[0 for k in range(1,n+1)] #contenu des urnes
    for j in range(1,n+1): #on choisit une boule au hasard
        i=rd.randint(1,n+1) #i=numéro de l'urne choisie
        L[i-1]=L[i-1]+1 #attention numérotation des listes...
    return max(L)
```

2. Déterminer, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, la loi de N_i.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont-elles indépendantes ?

- Soit $i \in [\![1; n]\!]$.
  - ⋆ L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "placer la boule dans l'urne i" est de probabilité $\dfrac{1}{n}$ (équiprobabilité du choix de l'urne).
  - ⋆ La variable aléatoire N_i compte alors le nombre de succès parmi ces n répétitions.

  Conclusion : $\forall i \in [\![1; n]\!], \ N_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n; \dfrac{1}{n}\right)$.

- Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$. Supposons $i \neq j$. On a :
  - ⋆ $\mathbb{P}\big([N_i = n] \cap [N_j = n]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$
  - ⋆ $\mathbb{P}\big([N_i = n]\big) = \mathbb{P}\big([N_j = n]\big) = \dfrac{1}{n^n}$

  Par conséquent : $\mathbb{P}\big([N_i = n] \cap [N_j = n]\big) \neq \mathbb{P}\big([N_i = n]\big) = \mathbb{P}\big([N_j = n]\big)$.
  Conclusion : les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_n$ ne sont pas 2 à 2 indépendantes, donc ne sont pas mutuellement indépendantes.