Interrogation 4
Lundi 4 novembre 2024

NOM et Prénom ....

Cours

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax$; $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$
2. Nature des intégrales de Riemann.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a}dt$ est convergente si, et seulement si, $a > 1$.
   - Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^a}dt$ est convergente si, et seulement si, $a < 1$.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$.
   - La fonction $t \longmapsto \dfrac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$?
     ✓ Puisque $t+1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t$ et $t^3+\sqrt{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3$, on a : $\dfrac{t+1}{t^3+\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$;
     ✓ $\forall t \in [1;+\infty[$, $\dfrac{t+1}{t^3+\sqrt{t}} \geqslant 0$; $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$;
     ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente (car d'exposant 2 et $2>1$).

     Conclusion : par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$ est convergente.
   - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$?
     ✓ Puisque $t+1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t$ et $t^3+\sqrt{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3$, on a : $\dfrac{t+1}{t^3+\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$;
     ✓ $\forall t \in [1;+\infty[$, $\dfrac{t+1}{t^3+\sqrt{t}} \geqslant 0$; $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$;
     ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 qui est convergente (car d'exposant $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < 1$).

     Conclusion : par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$ est convergente.

   > **Conclusion :** l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+\sqrt{t}}dt$ est convergente.

2. 2.a. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
   - La fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
   - Soit $B \in [0;+\infty[$. Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto x \\ v : x \longmapsto -e^{-x} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;B]$ et pour tout $x \in [0;B]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{array}\right.$.
     Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B xe^{-x}dx &= \big[-xe^{-x}\big]_0^B - \int_0^B -e^{-x}dx \\ &= -Be^{-B} - \big[e^{-x}\big]_0^B\end{aligned}$$

$$= -Be^{-B} - e^{-B} + 1$$

Or $\lim_{B\to+\infty} e^{-B} = 0$ et par croissance comparée $\lim_{B\to+\infty} Be^{-B} = 0$. D'où :

$$\lim_{B\to+\infty} -Be^{-B} - e^{-B} + 1 = 1$$

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et vaut 1.

2.b. En déduire, grâce au changement de variable $t = \sqrt{x}$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

- La fonction $x \longmapsto e^{-\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $B \in [0;+\infty[$. Effectuons le changement de variable $t = \sqrt{x}$ dans l'intégrale $\int_0^{B} e^{-\sqrt{x}}dx$:

$$\left| \begin{array}{ccc} t & = & \sqrt{x} \\ x & = & t^2 \end{array} \right. \quad ; \quad \left| \begin{array}{ccc} dt & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ dx & = & 2t\,dt \end{array} \right. \quad ;$$

$x =$	0	B
$t =$	0	$\sqrt{B}$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $t \longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;\sqrt{B}]$. On a ainsi :

$$\int_0^B e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^{\sqrt{B}} 2te^{-t}dt$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{B}} te^{-t}dt$$

Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est convergente et vaut 1. Par conséquent :

$$\lim_{B\to+\infty} 2\int_0^{\sqrt{B}} te^{-t}dt = 2$$

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ est convergente et vaut 2.

3. Considérons la fonction $f : t \longmapsto t^3e^{-t^2}$.

3.a. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} t^5e^{-t^2}$ puis démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

- $\lim_{t\to+\infty} t^5e^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty} (t^2)^{\frac{5}{2}}e^{-t^2} = 0$ par croissances comparées et composition.
- Ensuite, la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- ✓ D'après ce qui précède : $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

  ✓ $\forall t \in [1;+\infty[,\ f(t) \geqslant 0 \ ; \ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$;

  ✓ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente (car d'exposant 2 et $2 > 1$).

Conclusion : par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ; donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ également (car pas impropre en 0).

3.b. Qu'en déduire sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$?

✓ L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente ;

✓ la fonction f est impaire.

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et par relation de Chasles $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0$.