Interrogation 5
Lundi 2 décembre 2024

NOM et Prénom ....

Exercice 1

On considère la fonction $f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire X de densité f

   ✓ **Positivité.**
   Conclusion : de façon immédiate, f est positive sur $\mathbb{R}$.

   ✓ **Continuité.**
   - ⋆ f est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle ;
   - ⋆ f est continue sur $[0; +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue sur $[0; +\infty[$ ne s'annulant pas sur cet intervalle.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

   ✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$?
   - ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ est convergente et vaut 0.
   - ⋆ Soit $B \in [0; +\infty[$. On a :

   $$\begin{aligned}\int_0^B f(t)dt &= 2\int_0^B (1+t)^{-3}dt \\ &= 2\left[\frac{(1+t)^{-2}}{-2}\right]_0^B \\ &= 1 - \frac{1}{(1+B)^2}\end{aligned}$$

   Or, par opérations : $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} 1 - \frac{1}{(1+B)^2} = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est donc convergente et vaut 1.

   Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergent et, par relation de Chasles, vaut 1.

   > **Conclusion :** la fonction f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.
   On considère que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x < 0$:

   $$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x < 0 \text{ et } X(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ donc } [X \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0\end{aligned}$$

   - Si $x \geqslant 0$:

   $$\begin{aligned}F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && X \text{ est à densité, de densité } f \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt && \text{relation de Chasles} \\ &= 1 - \frac{1}{(1+x)^2} && \text{calculs faits en question précédente}\end{aligned}$$

   > **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

3. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

- $$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} \quad & \text{si, et seulement si,} \quad \text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)dt \text{ est convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} \quad \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt \text{ est convergente, car } f \text{ est nulle} \\ & \qquad \text{sur }]-\infty;0[\text{ et positive sur } [0;+\infty[\end{aligned}$$

- Soit $B \in [0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B tf(t)dt &= 2\int_0^B \frac{t}{(1+t)^3}dt \\ &= 2\int_0^B \frac{t+1-1}{(1+t)^3}dt \\ &= 2\int_0^B \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}dt \\ &= 2\left[-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2}\right]_0^B \\ &= 2\left(-\frac{1}{1+B} + \frac{1}{2(1+B)^2}\right) + 1 \end{aligned}$$

Or, par opérations $\lim\limits_{B\to+\infty} 2\left(-\frac{1}{1+B} + \frac{1}{2(1+B)^2}\right) + 1 = 1$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est ainsi convergente et vaut 1.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1+X)$ et on note F_Y sa fonction de répartition.

4.a. Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x - 1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\ln(1+X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([1+X \leqslant \mathrm{e}^x]\big) \quad \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant \mathrm{e}^x - 1]\big) \\ &= F_X(\mathrm{e}^x - 1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x - 1)$.

4.b. En déduire que la variable aléatoire Y est une variable aléatoire à densité puis en déterminer une densité (pour les khûbes : interdiction d'utiliser des résultats sur les lois usuelles).

✓ **Continuité.** La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.** Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, la fonction F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Par conséquent, F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en les réels x tels que $\mathrm{e}^x - 1 = 0$...
Conclusion : F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Conclusion : la variable aléatoire Y est à densité et admet pour densité la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$:

- pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \mathrm{e}^x f_X(\mathrm{e}^x - 1) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x-1)^3} & \text{si } \mathrm{e}^x - 1 > 0 \\ 0 & \text{si } \mathrm{e}^x - 1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $f_Y(0) = 0$ (par exemple).