Interrogation 6
Lundi 9 décembre 2024

NOM et Prénom ....

Cours

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage d'un réel a. Formule de Taylor-Young pour l'obtention d'un $DL_2(a)$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^2\big)$$

2. Donner les trois développements limités usuels :
   - $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
   - $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
   - pour tout réel α : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue en 0.
   Puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a :
   $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$
   Conclusion : la fonction f est continue en 0.

2. Démontrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
   Pour $x \neq 0$, suffisamment proche de 0, on a :
   $$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} \\ &= \frac{\frac{x-e^x+1}{e^x-1}}{x} \\ &= \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\end{aligned}$$
   Or, au voisinage de 0 :
   - $$\begin{aligned} x - e^x + 1 &= x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{-x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}x^2 \end{aligned}$$
   - $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc
   $$x(e^x-1) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

   Ainsi :
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1}{2}$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{-1}{2}$.

3. Calculer, pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ puis étudier la continuité de f' en 0.
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
   $$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$$
   - Or, au voisinage de 0 :
     - $\star$
     $$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x - x^2 \\ &= \frac{-1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}x^2 \end{aligned}$$
     - $\star$ $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc :
     $$(e^x-1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

   D'où :
   $$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}$$
   Par conséquent :
   $$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-1}{2} = f'(0)$$

   Conclusion : f' est continue en 0.

Exercice 2

1. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$.
   Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def suite_u(n)** qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=np.exp(-u)
    return u
```

2. Proposer deux fonctions **Python** différentes qui prennent en entrée un entier naturel non nul n et renvoient la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

```python
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k**3
    return S

def somme_bis(n):
    L=[1/k**3 for k in range(1,n+1)]
    return sum(L)
```