Interrogation 7

Lundi 6 janvier 2024

NOM et Prénom ....

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On admet que f est une densité de probabilité et on note X une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont f est une densité.

1. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.
   On considère que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x < 0$:
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \qquad x < 0 \text{ et } X(\Omega) = \mathbb{R}^+\text{, donc } [X \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$
   - Si $x \geqslant 0$:
   $$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad X \text{ est à densité, de densité } f \\ &= \int_{0}^{x} f(t)dt \qquad f \text{ est nulle sur }]-\infty;0[\\ &= \int_{0}^{x} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad x \geqslant 0 \\ &= \Big[-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
   Déterminer le moment d'ordre 2 de Z.
   Puisque Z suit la loi normale centrée réduite, Z admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :
   $$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2$$
   Or $\mathbb{E}(Z) = 0$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$...

   Conclusion : $\mathbb{E}(Z^2) = 1$.

3. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
   - On sait que :

   X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ est absolument convergente
   si, et seulement si, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} t f(t)dt$ est convergente, car l'intégrande est nulle sur $]-\infty;0[$ et positive sur $[0;+\infty[$
   si, et seulement si, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente

   - Or, par théorème de transfert, licite car la fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente et vaut $\mathbb{E}(Z^2)$.
   En particulier, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente...

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt && \text{parité de } t \longmapsto t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathbb{E}(Z^2) && \text{question précédente} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

4. On pose $Y = X^2$.

4.a. Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer la loi.

- Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que $Y = X^2$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Notons F_Y la fonction de répartition de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) && x<0 \text{ et } Y(\Omega)=\mathbb{R}^+,\text{ donc } [Y\leqslant x] =)\varnothing \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) \\
&= 0
\end{aligned}$$

  - ⋆ Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X^2 \leqslant x]\big) && x \geqslant 0 \\
&= \mathbb{P}\big([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\big) && X \text{ est à densité} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) && -\sqrt{x} \leqslant 0 \text{ et } F_X \text{ est nulle sur }]-\infty;0] \\
&= F_X(\sqrt{x}) && \sqrt{x} \geqslant 0 \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$... Or la fonction de répartition caractérise la loi.

> **Conclusion :** Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

4.b. Écrire une fonction **Python** de sorte que son exécution simule une réalisation de la variable aléatoire X.

Puisque X est à valeurs positives, on a $X = \sqrt{Y}$...

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simule_X():
    Y=rd.exponential(2)
    X=np.sqrt(Y)
    return X
```

4.c. En utilisant ce qui précède, démontrer que X admet un moment d'ordre 2 et le calculer.

On sait que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, elle admet donc une espérance et $\mathbb{E}(Y) = 2$.

Or $Y = X^2$...

> **Conclusion :** X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X^2) = 2$.