Interrogation 8

Mercredi 15 janvier 2025

NOM et Prénom ....

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que les seuls points en lesquels f est susceptible de présenter des extrema locaux sont $(0;0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$.
   - Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, les extrema locaux de f sont à chercher parmi ses points critiques.
   - Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
   $$\partial_1 f(x,y) = 4x^3 - 2x + 2y \quad ; \quad \partial_2 f(x,y) = 4y^3 - 2y + 2x$$
   - Ainsi :
   $$\begin{aligned}
   \nabla f(x,y) = 0_{2,1} &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 4x^3-2x+2y &=& 0 \\ 4y^3-2y+2x &=& 0 \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x^3 &=& x-y \\ 2y^3 &=& 2y-2x \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x^3 &=& x-y \\ y^3 &=& -x^3 \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x^3 &=& x-y \\ y^3 &=& (-x)^3 \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x^3 &=& x-y \\ y &=& -x \end{array}\right. \qquad \text{injectivité de la fonction } .^3 \text{ sur } \mathbb{R} \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x^3-2x &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{lcl} x(x^2-1) &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right. \\
   &\iff (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,-1) \text{ ou } (x,y) = (-1,1)
   \end{aligned}$$

   Conclusion : les seuls points en lesquels f est susceptible de présenter des extrema locaux sont $(0;0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$.

3. Démontrer que f possède un minimum local en $(1,-1)$ et $(-1,1)$.
   - Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
   $$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 12x^2 - 2 \quad ; \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = 2 = \partial^2_{2,1} f(x,y) \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 12y^2 - 2$$
   - En $(1,-1)$:
   $$\nabla^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned}
   \left(\lambda \text{ est valeur propre de } \nabla^2 f(1,-1)\right) &\iff \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 2 \\ 2 & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
   &\iff (10-\lambda)^2 - 4 = 0 \\
   &\iff \left\{\begin{array}{l} 10-\lambda = 2 \\ \text{ou} \\ 10-\lambda = -2 \end{array}\right. \\
   &\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = 8 \\ \text{ou} \\ \lambda = 12 \end{array}\right.
   \end{aligned}$$
   La matrice $\nabla^2 f(1,-1)$ a ainsi deux valeurs propres strictement positives.

   Conclusion : f admet un minimum local en $(1,-1)$, égal à $f(1,-1) = -2$.

   - En $(-1,1)$:
   Puisque $\nabla^2 f(1,-1) = \nabla^2 f(-1,1)$, la conclusion est identique.

> **Conclusion :** f admet un minimum local en $(-1,1)$, égal à $f(-1,1) = -2$.

4. **4.a.** Compléter l'égalité suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) + 2 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + \ldots.$

   Sans mal, on trouve :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) + 2 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + (x+y)^2$$

   4.b. Que peut-on conclure quant au minimum de f ?

   On avait trouvé $f(-1,1) = f(1,-1) = -2$. Ainsi, d'après la question précédente :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f(1,-1) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + (x+y)^2$$
   D'où :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f(1,-1) \geqslant 0$$
   Et donc :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant f(1,-1) = f(-1,1)$$

> **Conclusion :** f possède un minimum global égal à -2, atteint en $(1,-1)$ et $(-1,1)$.

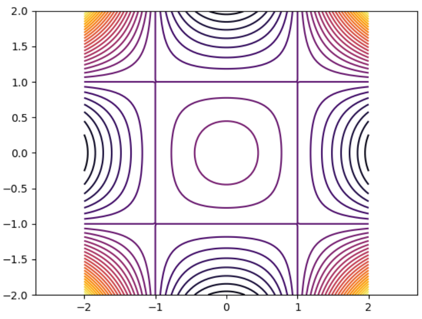
5. **5.a.** Déterminer la hessienne de f en $(0,0)$. Qu'en conclure ?
   - On a :
$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$
   - Après calculs, on trouve que les valeurs propres de $\nabla^2 f(0,0)$ sont 0 et -4.

> **Conclusion :** $\nabla^2 f(0,0)$ possède une valeur propre nulle, nous ne pouvons donc pas conclure sur la nature du point critique $(0,0)$.
> En revanche, f ne peut pas admettre de minimum local en $(0,0)$ puisque $\nabla^2 f(0,0)$ possède une valeur propre strictement négative.

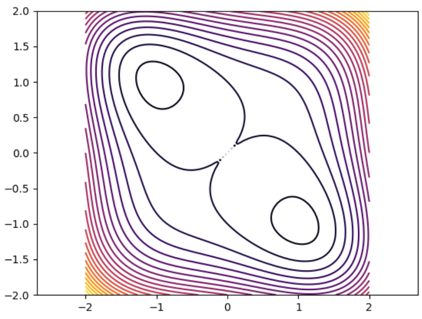
   5.b. En considérant $f(x,0)$ et $f(x,x)$ pour x suffisamment proche de 0 mais différent de 0, conclure sur la nature du point critique $(0,0)$.
   - Soit x suffisamment proche de 0, $x \neq 0$. On a :
$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^4 - x^2 \\ &= x^2(x^2-1) \\ &< 0 && x \text{ proche de } 0,\ x \neq 0 \end{aligned}$$
     Or $f(0,0) = 0$. Donc, pour tout $x \neq 0$, suffisamment proche de 0, on a $f(x,0) < f(0,0)$: f n'admet donc pas de minimum local en $(0,0)$.
   - Soit x suffisamment proche de 0, $x \neq 0$. On a :
$$\begin{aligned} f(x,x) &= 2x^4 - 2x^2 + 2x^2 \\ &= 2x^4 \\ &> 0 && x \neq 0 \end{aligned}$$
     Or $f(0,0) = 0$. Donc, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x,x) > f(0,0)$: f n'admet donc pas de maximum local en $(0,0)$.

> **Conclusion :** f admet un point col en $(0,0)$.

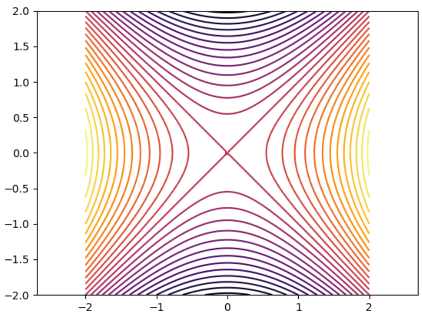
6. Parmi les trois graphiques ci-dessous, lequel représente des lignes de niveaux de f sur $[-2;2] \times [-2;2]$? Justifier la réponse.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Il s'agit du graphique 2.
En effet :
- le graphique 1 n'a pas de point col en $(0,0)$, les lignes de niveaux indiquent plutôt un minimum ou un maximum (ou un point en lequel f ne serait pas définie...) ;
- le graphique 3 présente un point col en $(0,0)$, mais pas d'extremum en $(1,-1)$ et $(-1,1)$.