Interrogation 9

Lundi 20 janvier 2025

NOM et Prénom ....

Cours

Énoncer la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes **la même espérance** $\boldsymbol{m}$ et **la même variance** $\boldsymbol{\sigma^2}$ (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$$

Exercice 1

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Démontrer : $\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire $\overline{X_n}$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance (car les X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p), donc $\overline{X_n}$ admet une variance et, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, licite car $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}$$

Or :

- $\overline{X_n}$ admet une espérance (car admet une variance) et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{X_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p\\
&= \frac{1}{n} np\\
&= p
\end{aligned}$$

- puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) && X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p(1-p)\\
&= \frac{1}{n^2} np(1-p)\\
&= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Enfin, une rapide étude de fonction permet d'établir : $\forall x \in [0;1],\ x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
D'où :

$$p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([|\overline{X_n}-p| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Exercice 2

On considère une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0;2]$. Pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Écrire une fonction **Python `simule_M(n)`** qui renvoie une réalisation de M_n.

```
import numpy.random as rd

def simule_M(n):
    L=[2*rd.random() for k in range(n)]
    return max(L)
```

2. Justifier que M_n possède une espérance puis écrire une fonction **Python `esperance_M(n)`** qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(M_n)$ en utilisant la loi faible des grands nombres.
   - Puisque $M_n(\Omega)$ est borné ($M_n(\Omega) \subset [0;2]$), la variable aléatoire M_n possède une espérance (et même une variance, pour appliquer la loi faible des grands nombres...).
   - Programme :

```
def esperance_M(n):
    L=[simule_M(n) for k in range(10000)]
    return sum(L)/len(L)
```

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi exponentielle de paramètre $1+\dfrac{1}{n}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de X_n et F celle d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ainsi que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, soit donc $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$, d'où :
  $$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$
- Si $x \geqslant 0$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)x}$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x = -x$. D'où, par composition et opération :
  $$\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)x} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

Conclusion : la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.