Interrogation 1
Jeudi 4 septembre 2025

NOM et Prénom ....

Cours

Soient E un espace vectoriel, $n \in [\![2; +\infty[\![$ ainsi que $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E.

1. Quel est le nom de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$?
   C'est l'espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
2. Que représente $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$?
   $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles avec les vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

Exercice 1

Considérons $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{3,1}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = 0_{3,1} \quad & \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} -2x + y = -z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
& \iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMA = 0_n\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ✓ Par définition de F, on a déjà $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ✓ Ensuite, on a $A0_nA = 0_n$, donc $0_n \in F$: F est non vide.
- ✓ Soient $M, N \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Démontrons que $aM + bN \in F$.
  - Puisque $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on a déjà $aM + bN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - Puis :

$$\begin{aligned} A(aM + bN)A &= aAMA + bANA \\ &= 0_n \end{aligned}$$

$M, N \in F$, donc $AMA = 0_n$ et $ANA = 0_n$

Donc $aM + bN \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3

On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \;/\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Démontrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \;/\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$