

Prénom et NOM : Loïs COLAIRE

COURS

1. Rappeler les croissances comparées lorsque $n \rightarrow +\infty$:

- entre $\ln(n)$ et n :

$$\forall a, b > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^a}{n^b} = 0 \quad ; \quad \forall a, b > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{\ln(n)^b} = +\infty$$

- entre q^n et n (la quantification sur q doit être faite) :

$$\forall a > 0, \forall q \in]-1; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a q^n = 0 \quad ; \quad \forall a > 0, \forall q \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$$

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites ne s'annulant pas au voisinage de $+\infty$. Démontrer : $\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

Supposons $\left\{ \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right.$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$; et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$, autrement dit, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

EXERCICE

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple de $\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^2 + 3n + 2 + \ln(n)}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- $3n^2 + 2n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n^2$

- Par croissances comparées $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{5n^2} = 0$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 3n + 2 + \ln(n)}{5n^2} = 1$$

Ainsi :

$$5n^2 + 3n + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 5n^2$$

Par conséquent :

$$\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^2 + 3n + 2 + \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n^2}{5n^2}$$

Conclusion : $\frac{3n^2 + 2n - 1}{5n^2 + 3n + 2 + \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{5}$.

2. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Or $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, donc les séries $\sum_{k \geq 0} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ et $\sum_{k \geq 0} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{k^2}{2^k}$ est convergente (comme combinaison linéaire de telles séries) et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} &= \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2^2} \frac{2}{\frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2^2}} \\ &= 4 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 6.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$, on a $1 - \frac{1}{n} > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

Ensuite :

$$\checkmark \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} \neq 0,$$

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0.$$

Par conséquent :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

Ainsi :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle en -1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp(-1)$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

➡ Réflexe !

On passe par l'écriture avec exp et ln quand la variable est à la fois en base et en exposant de la puissance.
On rappelle au passage que, à la limite, les formes 1^∞ et 0^0 sont des formes indéterminées, qui seront transformées (et levées ensuite) en repassant par cette écriture.

4. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier naturel non nul n et renvoyant la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

```
1 def somme(n):
2     L=[1/k**2 for k in range(1,n+1)]
3     return sum(L)
4
5 #ou le programme suivant :
6
7 def sommebis(n):
8     S=0
9     for k in range(1,n+1):
10         S=S+1/k**2
11     return S
```