

Prénom et NOM : Loïs COLAIRE

COURS

Soient E un espace vectoriel, $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E .

1. Que désigne $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$? Quel est son nom?

$\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

C'est un espace vectoriel : l'espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

2. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de E lorsque : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0 \right)$.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On pose $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0_{3,1}\}$. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis en déterminer une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 0_{3,1} &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_0 = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de E_0 qui est :

- ✓ génératrice de E_0 par définition,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_0 .

2. On pose $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = X\}$. Démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis en déterminer une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$AX = X \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$E_1 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de E_1 qui est :

- ✓ génératrice de E_1 par définition,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_1 .

3. On définit la famille $\mathcal{B}$ par : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\implies &\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b &= 0 \\ a &+ c = 0 \end{cases} \\ &&\implies &\begin{cases} a + b + c = 0 \\ &-c = 0 \\ &-b &= 0 \end{cases} \\ &&\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} &\implies &a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre, d'après ce qui précède ;
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Conclusion : la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. On pose $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

1. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments une liste **L** et un élément **x** puis renvoyant en sortie le nombre d'occurrences de **x** dans la liste **L**.

```
1 def occ(L, x):
2     c=0
3     for e in L:
4         if e==x:
5             c=c+1
6     return c
```

2. Expliquer ce que renvoie l'exécution de la fonction **mystere** ci-dessous lorsque **L** est une liste.

```
1 def mystere(L):
2     n=int(np.floor(len(L)/2)) #n= partie entière de len(L)/2
3     for k in range(0,n+1):
4         L[k],L[len(L)-1-k]=L[len(L)-1-k],L[k]
5     return L
```

Lors de l'exécution de **mystere(L)**, k parcourt les rangs 0 à $\left\lfloor \frac{\text{len}(L)}{2} \right\rfloor$ et échange les éléments d'indices k et $\text{len}(L) - 1 - k$.
La liste retournée est la liste L dans laquelle l'ordre des éléments a été inversé.