Interrogation 2
Jeudi 18 septembre 2025

NOM et Prénom ....

Cours

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites définies sur $\mathbb{N}$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. Démontrer : $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v'_n) \end{array}\right\} \implies u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n v'_n)$.

   Supposons $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n) \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v'_n) \end{array}\right\}$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis
   $$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$$
   Or $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$; et $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v'_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 0$. D'où, par opérations :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \mu\frac{u'_n}{v'_n} = 0$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 0$, autrement dit, $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n v'_n)$.

2. Démontrer : $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

   Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right.$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis
   $$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$
   Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$. D'où, par opérations :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 1$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$, autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$.

Exercice 1

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$: $1-\frac{1}{n} > 0$.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$:
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$
Or

✓ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{-1}{n} \neq 0$,

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$.

Par conséquent :

$$\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

Ainsi :

$$n\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right) = -1$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle en -1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right)\right) = \exp(-1)$$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Proposer deux fonctions **Python**, l'une utilisant les listes en compréhension, l'autre sans utiliser de liste, qui prennent toutes deux un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+1}$.

```python
def somme(n):
    L=[1/(k**2+1) for k in range(0,n+1)]
    return sum(L)

def sommebis(n):
    S=0
    for k in range(0,n+1):
        S=S+1/(k**2+1)
    return S
```

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste composée de $u_0,\dots,u_n$.

```python
def listeU(n):
    u=0
    L=[0]
    for k in range(1,n+1):
        u=u+u**2
        L.append(u)
    return L
```

Exercice 3

Etudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$.

✓ $\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$,

✓ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}\geqslant 0,\ \frac{2}{n^2}\geqslant 0$,

✓ $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc elle est convergente et ainsi $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n^2}$ également.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ est convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ également.