

Prénom et NOM : Loïs COLAIRE

EXERCICE 1

1. Justifier que le problème $\begin{cases} y' - 2y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède une unique solution et la déterminer.

- Ce problème est un problème de Cauchy sur une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, il possède donc une unique solution.
- Résolution de $y' - 2y = 4$:
 - * L'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - * La fonction $x \mapsto -2$ est solution de particulière de $y' - 2y = 4$.
- Conclusion : l'ensemble des solutions de $y' - 2y = 4$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x} - 2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'après le point précédent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y' - 2y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} - 2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{2x} - 2 \\ \lambda - 2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 3e^{2x} - 2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'unique solution du problème de Cauchy donné est la fonction $x \mapsto 3e^{2x} - 2$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = x^2$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherchera une solution particulière dans $\mathbb{R}_2[x]$.

- L'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admettant 2 comme unique solution. Ainsi, l'ensemble des solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2ax + b ; \quad f''(x) = 2a$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (f \text{ est solution de } y'' - 4y' + 4y = x^2) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, 4ax^2 + (4b - 8a)x + 4c - 4b + 2a = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 4a &= 1 \\ -8a + 4b &= 0 \\ 2a - 4b + 4c &= 0 \end{cases}$$

↙ identification

$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$ est donc solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - 4y' + 4y = x^2$ est $\left\{ x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + (\lambda x + \mu)e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y''' - 4y'' + 3y' = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} y''' - 4y'' + 3y' = 0 &\iff (y' \text{ est solution de } z'' - 4z' + 3z = 0) \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = ae^x + be^{3x} \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ae^x + \frac{b}{3}e^{3x} + c \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''' - 4y'' + 3y' = 0$ est $\{x \mapsto ae^x + be^{3x} + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

EXERCICE 2

1. 1.a. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1} \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **suite_u(n)** renvoie la valeur de u_n .

```
1 def suite_u(n):
2     u=1
3     for k in range(1,n+1): #k=rang du terme calculé
4         u=u**2/k
5     return u
```

- 1.b. En déduire un programme permettant de représenter les termes $u_0, u_1, \dots, u_{10}$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

```
1 X=range(0,11)
2 Y=[suite_u(n) for n in range(0,11)]
3 plt.plot(X,Y, 'o')
4 plt.show()
```

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Compléter la fonction **Python** suivante de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **suite_u(n)** renvoie la valeur de u_n .

```
1 def suite_u(n):
2     L=...
3     for k in range(3,n+1):
4         u=...
5         L.append(u)
6     return ...
```

```
1 def suite_u(n):
2     L=[0,0,1]
3     for k in range(3,n+1):
4         u=L[k-1]+2*L[k-2]-L[k-3]
5         L.append(u)
6     return L[n] #ou return u
```