Interrogation 3
Jeudi 25 septembre 2025

NOM et Prénom ....

Cours

Énoncer les deux critères de comparaison par négligeabilité sur les séries à termes généraux positifs.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On a :

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente}\right)$

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $1+\frac{1}{n}>0$ et ainsi : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

   Or :

   ✓ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\neq 0$,

   ✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

   D'où $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ et ainsi :

   $$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Par conséquent :

   $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$

   Et par continuité de l'exponentielle en 0, on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp(0)=1$$

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}=1$.

2. Convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2}{3^n}$.

   Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

   $$\sum_{n=0}^{N}\frac{n+2}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

   Or $\frac{1}{3}\in]-1;1[$, donc les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ sont des séries géométriques convergentes.

   Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+2}{3^n}$ est convergente (comme combinaison linéaire de séries convergentes) et :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+2}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + 2\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\frac{3^2}{2^2} + 2\frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{4} + 3 \\
&= \frac{15}{4}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{3^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n} = \frac{15}{4}$.

3. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

   On a :

   ✓ par croissances comparées : $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$. D'où :

   $$\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

   ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0, \quad \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$

   ✓ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$, donc elle est convergente ($\frac{3}{2} > 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ est convergente.

4. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

   On a :

   ✓ pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, $\ln(n) \geqslant 1$ et $\sqrt{n} > 0$, d'où :

   $$\forall n \in [\![3; +\infty[\![, \quad \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$$

   ✓ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$, donc elle est divergente ($\frac{1}{2} \leqslant 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Sans utiliser `L.count(x)`, écrire une fonction **Python** qui prend en arguments une liste `L` et un élément x puis qui renvoie le nombre d'occurrences de x dans la liste `L`.

```python
def nombreocc(L,x):
    c=0
    for e in L:
        if e==x:
            c=c+1
    return c
```

2. Sans utiliser `max` et `L.sort`, écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée une liste `L` de réels et renvoyant le maximum de la liste `L`.

```python
def monmax(L):
    maxi=L[0]
    for x in L:
        if x>maxi:
            maxi=x
    return maxi
```