

NOM et Prénom .....

## EXERCICE 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ .

1. Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$ .

- On a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

- Soit ensuite  $N \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Conclusion :** la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit une loi de probabilité.

2. Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = u_n$ .

Démontrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.

- On sait que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . Ainsi :

$X$  admet une espérance si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} |n \mathbb{P}([X = n])|$  est convergente

si, et seulement si, la série  $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}([X = n])$  est convergente, car :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \mathbb{P}([X = n]) \geq 0$

- Soit  $N \in \mathbb{N}$ , suffisamment proche de  $+\infty$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N n \mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$ , donc la série  $\sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  est une série géométrique convergente. Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}([X = n])$  est convergente.

- On en déduit que  $X$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2^2} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $X$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(X) = 1$ .

## EXERCICE 2

Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ . Une urne contient  $n$  balles numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et  $Y$  celui de la seconde balle.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire  $Y$ .

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleY(n):
4     X=rd.randint(1,n+1)
5     Y=rd.randint(1,n+1)
6     while Y==X:
7         Y=rd.randint(1,n+1)
8     return Y
    
```

2. Donner la loi de  $X$  et rappeler son espérance et sa variance.

- ✓ L'expérience consiste à piocher, de façon équiprobable, une balle dans une urne composée de  $n$  balles numérotées de 1 à  $n$ .
- ✓ La variable aléatoire prend comme valeur le numéro de la balle tirée.

Conclusion :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$ .

- On a déjà  $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .
- Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Supposons l'évènement  $[X = k]$  réalisé. Autrement dit, on a tiré la balle numérotée  $k$  au premier tirage. Le second tirage s'effectue donc dans une urne composée de  $n - 1$  balles, numérotées de 1 à  $n$ , sauf la balle  $k$ .

Soit ensuite  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Distinguons deux cas :

\* si  $j = k$  :

Il est impossible de tirer à nouveau la balle numéro  $k$ ... D'où :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) = 0$$

\* si  $j \neq k$  :

Par équiprobabilité du choix de la balle dans l'urne :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) = \frac{1}{n-1}$$

Conclusion :  $\forall (k, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases}$ .

4. En déduire la loi de  $Y$ .

On sait ue  $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

Soit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . D'après la formule des probabilités totales, avec  $([X = k])_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) && \left. \begin{array}{l} \hookrightarrow \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0 \\ \hookrightarrow \text{si } k = j, \text{ alors } \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) = 0 \\ \hookrightarrow \text{question précédente} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j]) \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \\
 &= \frac{n-1}{n(n-1)} \\
 &= \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ .