Interrogation 4
Jeudi 2 octobre 2025

NOM et Prénom ....

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité sur n.
   - On a déjà :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$$
   - Soit ensuite $N \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$
   Or $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.
   Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et :
   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X=n]\big) = u_n$.
   Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
   - On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi :
   X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left|n\mathbb{P}\big([X=n]\big)\right|$ est convergente
   si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente, car : $\forall n \in \mathbb{N},\ n\mathbb{P}\big([X=n]\big) \geqslant 0$
   - Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :
   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}\big([X=n]\big) &= \sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ &= \frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$
   Or $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}\big([X=n]\big)$ est convergente.
   - On en déduit que X admet une espérance et :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2^2}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

   Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 2

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Une urne contient n balles numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et Y celui de la seconde balle.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier $n \in [\![2;+\infty[\![$ puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y.

```python
import numpy.random as rd

def simuleY(n):
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.randint(1,n+1)
    while Y==X:
        Y=rd.randint(1,n+1)
    return Y
```

2. Donner la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.

✓ L'expérience consiste à piocher, de façon équiprobable, une balle dans une urne composée de n balles numérotées de 1 à n.
✓ La variable aléatoire prend comme valeur le numéro de la balle tirée.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!],\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$.

- On a déjà $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
- Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Supposons l'évènement $[X=k]$ réalisé.
  Autrement dit, on a tiré la balle numérotée k au premier tirage. Le second tirage s'effectue dont dans une urne composée de $n-1$ balles, numérotées de 1 à n, sauf la balle k.
  Soit ensuite $j \in [\![1;n]\!]$. Distinguons deux cas :
  - ∗ si $j=k$:
    Il est impossible de tirer à nouveau la balle numéro k... D'où :
    $$\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) = 0$$
  - ∗ si $j \neq k$:
    Par équiprobabilité du choix de la balle dans l'urne :
    $$\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) = \frac{1}{n-1}$$

Conclusion : $\forall (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ \mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases}$.

4. En déduire la loi de Y.

On sait ue $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.
Soit $j \in [\![1;n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=j]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=j]\big) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) && \text{si } k=j, \text{ alors } \mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) = 0 \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=j]\big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$.