

Prénom et NOM : Loïs COLAIRE

COURS

1. Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X .

La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}([X \leq x]) \end{cases}$.

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$,
- F_X est continue à droite en tout réel (et admet une limite à gauche en tout réel),
- F_X est constante par morceaux si, et seulement si, X est discrète (c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable),
- la fonction de répartition caractérise la loi : deux variables aléatoires ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

2. Sans utiliser la commande `rd.binomial`, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `binomiale(n,p)` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

```
1 def binomiale(n,p):
2     x=0
3     for k in range(n):
4         if rd.random()<p:
5             x=x+1
6     return x
```

EXERCICE 1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminer $\mathbb{P}([X = Y])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}([X = n] \cap [X = Y])$ converge et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X = Y]) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n]) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) \mathbb{P}([Y = n]) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2 ((1-p)^2)^{n-1} && k = n-1 \\
 &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^k \\
 &= p^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} \\
 &= \frac{p}{2-p}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X = Y]) = \frac{p}{2-p}$.

EXERCICE 2

Soit $n \in \llbracket 2 : +\infty \rrbracket$. On dispose de n urnes telles que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k balles numérotées de 1 à k .

On choisit de manière équiprobable une des n urnes ; puis on y effectue de manière équiprobable le tirage d'une balle.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X . Donner son espérance et sa variance.

- ✓ L'expérience consiste en le choix équiprobable d'une urne parmi n urnes numérotées de 1 à n .
- ✓ La variable aléatoire X prend comme valeur le numéro de l'urne choisie.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$; $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

2. Démontrer que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Procédons par double inclusion.

$\square \subset$ Y prend comme valeur un numéro de balles qui est, ici, un entier entre 1 et n . D'où :

$$Y(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$$

$\square \supset$ Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrons que $[Y = j] \neq \emptyset$.

L'issue consistant à choisir l'urne numéro n et à y tirer la balle numéro j réalise l'évènement $[Y = j]$. D'où :

$$\llbracket 1; n \rrbracket \subset Y(\Omega)$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

3. Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = i]$ puis donner, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j])$.

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons l'évènement $[X = i]$ réalisé.

- ✓ Dans ce cas, le tirage de balle s'effectue de manière équiprobable dans l'urne numéro i composée de i balles numérotées de 1 à i .
- ✓ La variable aléatoire Y prend alors comme valeur le numéro de la boule tirée.

Conclusion : la loi conditionnelle de Y sachant l'évènement $[X = i]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; i \rrbracket$ et ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

4. En déduire, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, une expression de $\mathbb{P}([Y = j])$ en fonction d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = i])_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) && \hookrightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = i]) \neq 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) && \hookrightarrow \forall i < j, \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = 0 \\ &= \sum_{i=j}^n \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) && \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket) \text{ et } \forall i \geq j, \mathbb{P}([X = i]) \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) = \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}([Y = j]) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$.

5. Justifier que Y possède une espérance et la calculer.

On sait que $Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi $Y(\Omega)$ est fini, donc Y admet une espérance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i} && \hookrightarrow \text{voir QUESTION CLASSIQUE 2} \\ &= \dots \\ &= \frac{n+3}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+3}{4}$.

6. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleY(n)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y .

```
1 def simuleY(n):
2     X=rd.randint(1,n+1)
3     Y=rd.randint(1,X+1)
4     return Y
```