Interrogation 5
Lundi 12 octobre 2026

Prénom et NOM : Loïs COLAIRE

Cours

Soient E et F deux espaces vectoriels ainsi que f une application linéaire de E dans F.

1. $\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_E\}$
2. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\big)$
3. Démontrer que f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.
   Raisonnons par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est injective. Montrons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Raisonnons par double-inclusion.

   $\supset$ Immédiat, car f est linéaire, donc $f(0_E) = 0_F$. D'où :
   $$0_E \in \ker(f)$$

   $\subset$ Soit $x \in \ker(f)$. Ainsi :
   $$\begin{aligned} f(x) &= 0_F \\ &= f(0_E) \end{aligned}$$
   ↙ linéarité de f

   Par injectivité de f, on obtient : $x = 0_E$. D'où :
   $$\ker(f) \subset \{0_E\}$$

   Par conséquent : $\ker(f) = \{0_E\}$.

   $\Leftarrow$ Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective.Soient $x, x' \in E$. On a :
   $$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\implies f(x) - f(x') = 0_F \\ &\implies f(x - x') = 0_F \quad \text{↙ linéarité de } f \\ &\implies x - x' \in \ker(f) \\ &\implies x - x' = 0_E \quad \text{↙ } \ker(f) = \{0_E\} \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

   Par conséquent : f est injective.

Exercice 1

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ de sorte que $f(X) = AX$.

   Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
   $$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\iff AX = 03,1 \\ &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \quad X = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent $\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $\ker(f)$ qui est :

- ✓ génératrice de $\ker(f)$,
- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

Exercice 2

On considère l'application f qui à toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
   - ✓ Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Démontrons que $f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.
     La fonction $x \longmapsto x+1$ est polynomiale de degré 1, donc la fonction $x \longmapsto P(x+1)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.
     Par conséquent, $f(P)$ est également polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. Autrement dit : $f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.
   - ✓ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$. Démontrons que $f(aP+bQ) = af(P) + bf(Q)$.
     Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(aP+bQ)(x) &= (aP+bQ)(x+1) - (aP+bQ)(x) \\ &= aP(x+1) + bQ(x+1) - aP(x) - bQ(x) && \text{linéarité de l'évaluation en } x \text{ et en } x+1 \\ &= af(P)(x) + bf(Q)(x) \\ &= \big(af(P) + bf(Q)\big)(x) && \text{linéarité de l'évaluation en } x \end{aligned}$$

     Par conséquent $f(aP+bQ) = af(P) + bf(Q)$: f est une application linéaire.

   Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. On note (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Exprimer $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ en fonction de P_0, P_1 et P_2.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$, et ainsi $f(P_0)(x) = 0$. D'où :
     $$f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x$, et ainsi $f(P_0)(x) = 1$. D'où :
     $$f(P_1) = P_0$$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = x^2$, et ainsi
     $$\begin{aligned} f(P_2)(x) &= (x+1)^2 - x^2 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$
     D'où :
     $$f(P_2) = P_0 + 2P_1$$

3. En déduire que la famille (P_0, P_1) est une base de $\text{Im}(f)$.
   Puisque (P_0, P_1, P_2) est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}\big(f(P_0), f(P_1), f(P_2)\big) \\ &= \text{Vect}(0_{\mathbb{R}_2[x]}, P_0, P_0 + 2P_1) && \text{question précédente} \\ &= \text{Vect}(P_0, P_0 + 2P_1) \\ &= \text{Vect}(P_0, 2P_1) \\ &= \text{Vect}(P_0, P_1) \end{aligned}$$

   Par conséquent, la famille (P_0, P_1) est :
   - ✓ génératrice de $\text{Im}(f)$,
   - ✓ libre comme sous-famille d'une famille libre (sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$).

   Conclusion : la famille (P_0, P_1) est une base de $\text{Im}(f)$. Autrement dit $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[x]$.