Interrogation 5
Jeudi 6 novembre 2025

NOM et Prénom ....

Exercice 1

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(e^x+1)}{x} &= \frac{\ln\left(e^x(1+e^{-x})\right)}{x} \quad e^x>0 \text{ et } 1+e^{-x}>0\\ &= \frac{\ln(e^x)+\ln(1+e^{-x})}{x}\\ &= \frac{x+\ln(1+e^{-x})}{x}\\ &= 1+\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\end{aligned}$$

Or, par opérations et compositions :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} = 0$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\ln(1+e^{-x})}{x} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x} = 1$.

2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

- En 0, à gauche :
  - ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$;
  - ✓ $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ par croissances comparées.

  Conclusion : par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = 0$.

- En 0, à gauche :
  - ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$;
  - ✓ $\lim\limits_{X\to+\infty} Xe^X = +\infty$ par opérations.

  Conclusion : par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Or par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

D'où, par composition (ou continuité de l'exponentielle en 0) :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$$

Conclusion : $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

4. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + x^2)}$ puis démontrer qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
- * On sait que :
    - ✓ la fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ sur ces intervalles ;
    - ✓ la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

  Ainsi, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1 + x^2)$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
  Par conséquent, la fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotients de fonctions continues sur ces intervalles qui ne s'annulent pas sur ces intervalles.
  * En 0 :
    - ✓ $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$;
    - ✓ $e^X - 1 \underset{X \to 0}{\sim} X$ et $\ln(1 + X) \underset{X \to 0}{\sim} X$

  D'où :
  $$\frac{e^{x^2} - 1}{\ln(1 + x^2)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
  Ainsi :
  $$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$
  Conclusion : f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$.

Exercice 2

Compléter le tableau en donnant, pour chaque ligne, une primitive de la fonction donnée en colonne de gauche.

Fonction	Une primitive
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$
$x \longmapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2)$
$x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$	$x \longmapsto 2e^{\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \dfrac{-2x - 1}{(1 + x + x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x + x^2}$
$x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2} \ln(x)^2$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x \ln(x)^n}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($n \in [\![2; +\infty[\![$)	$x \longmapsto \dfrac{1}{(1 - n) \ln(x)^{n-1}}$
$x \longmapsto \dfrac{x}{x + 1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$	$x \longmapsto x - \ln(1 + x)$