Interrogation 6
Jeudi 27 novembre 2025

NOM et Prénom ....

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) &\iff AX = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi une famille de $\ker(A)$ qui est :

✓ génératrice de $\ker(A)$,
✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A)$.

2. La matrice A est-elle inversible ?

D'après la question précédente, $\ker(A) \neq \{0_{3,1}\}$.

Conclusion : A n'est pas inversible.

3. Déterminer la dimension puis une base de $\mathrm{Im}(A)$.

- D'après le théorème du rang :

$$3 = \mathrm{rg}(A) + \dim\big(\ker(A)\big)$$

Or, d'après la question précédente, $\dim\big(\ker(A)\big) = 1$.

Conclusion : $\mathrm{rg}(A) = 2$, autrement dit, $\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = 2$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$, donc $C_1 = -C_2 - C_3$

Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $\mathrm{Im}(A)$ qui est :

✓ génératrice de $\mathrm{Im}(A)$,
✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.

4. On considère à présent f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A.
On note également $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (1,0,-1)$ ainsi que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.a. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
Puisque la matrice de f canoniquement associée est la matrice A, et qu'elle n'est pas inversible, f n'est pas bijectif.

4.b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

- $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$, donc $f(e_1) = (0,0,0)$.
- $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$, donc $f(e_2) = (3,-3,0) = 3e_2$.
- $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $f(e_3) = (3,0,-3) = 3e_3$.

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

4.c. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. *On justifiera rapidement que la matrice P est inversible.*
Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathscr{B}$ ainsi que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On a ainsi :

$$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

et :

✓ P est inversible, comme matrice de passage ;
✓ D est diagonale, d'après la question précédente ;
✓ par formule du changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = P_{bc,\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},bc}$$

Autrement dit, puisque $P_{\mathscr{B},bc} = P_{bc,\mathscr{B}}^{-1}$:

$$A = PDP^{-1}$$

Exercice 2

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On considère une urne disposant de n boules dont une seule est noire.
On effectue des tirages sans remise jusqu'à l'obtention de la boule noire ; et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages ainsi effectués.
Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier naturel $n \geqslant 2$ puis qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
import numpy.random as rd

def simuleX(n):
    nb=n#nb de boules présentes
    X=1
    while rd.random()<(nb-1)/nb: #tant qu'on tire des blanches
        nb=nb-1
        X=X+1
    return X
```