Interrogation 7

Jeudi 4 décembre 2025

NOM et Prénom ....

Cours

1. **Définition.** Une variable aléatoire est à densité lorsque sa fonction de répartition est :
   - ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
   - ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

2. Une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité lorsque F est :
   - ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
   - ✓ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points,
   - ✓ croissante sur $\mathbb{R}$,
   - ✓ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

Exercice 1

Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f.

- ✓ **Positivité ?** On a immédiatement $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
  ✓ **Continuité ?**
  - × Sur $]-\infty;-1[$: la fonction f est continue sur $]-\infty;-1[$ comme inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur cet intervalle.
  - × Sur $[1;+\infty[$: de même, f est continue sur $[1;+\infty[$.
  - × Sur $]-1;1[$: f est continue sur $]-1;1[$ car constante sur cet intervalle.

  Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1.

  ✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$?
  - × $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

    Puisque f est nulle sur $]-1;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ est convergente et vaut 0.
  - × $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$?

    Soit $B \in [1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^B f(x)dx &= \int_1^B \frac{1}{2x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^B \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{B}+1\right)\end{aligned}$$

    Or $\lim\limits_{B\to+\infty} \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{B}+1\right) = \dfrac{1}{2}$.

    Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.
  - × $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$?

    Par parité de f, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est aussi convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

  Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et par relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Conclusion : f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

- Notons F_X la fonction de répartition de X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && \text{X est à densité, de densité f} \end{aligned}$$

  * Si $x \leqslant -1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{t}\right]_{t\to-\infty}^{x} \\ &= \frac{-1}{2x} \end{aligned}$$

  * Si $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt && x \in]-1;1[\\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} 0dt && \text{calcul fait précédemment} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  * Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt && \text{calculs précédents, car $x \geqslant 1$} \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+1\right) && \text{calcul fait précédemment} \\ &= 1 - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_x(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in]-1;1[\\ 1 - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Exercice 2

On considère une urne composée d'une boule rouge et d'une boule verte. On effectue des tirages avec remise tels que si l'on tire une boule rouge, on la replace en rajoutant une boule rouge dans l'urne ; et si l'on tire une boule verte, les tirages s'arrêtent.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Écrire une fonction **Python** qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy.random as rd

def simuleX():
    r=1
    X=1
    while rd.random()<r/(r+1): #tant qu'on tire rouge
        r=r+1
        X=X+1
    return X
```