Interrogation 8
Jeudi 15 janvier 2026

NOM et Prénom ....

Cours

1. Nommer ces lettres :
   - λ : lambda
   - μ : mu
   - δ : delta (minuscule)
   - φ : phi (minuscule)
   - α : alpha
   - σ : sigma
   - Φ : phi (majuscule)
   - Δ : delta (majuscule)

2. 2.a. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer le moment d'ordre 2 de Z.

Puisque $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, on a :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \quad ; \quad \mathbb{V}(Z) = 1$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \left(\mathbb{E}(Z)\right)^2$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Z^2) = 1$.

2.b. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et déterminer sa valeur.

Puisque Z admet un moment d'ordre 2, par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)dx$ est convergente et vaut 1, où $f_Z : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Par conséquent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

Or la fonction $x \longmapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire. D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

★ Classique ! ★
Question très classique, qu'il faut bien garder en tête.

Exercice 1

On considère la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

✓ **Continuité ?**
La fonction $x \longmapsto 1 + e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **$\mathscr{C}^1$?**
De même, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

✓ **Croissance ?**
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

Par conséquent, F est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

✓ **Limites ?**
Par opérations, on a immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Conclusion : F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On considère ensuite une variable aléatoire X admettant F comme fonction de répartition.

2. Démontrer que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.
   Soit $y \in]0;1[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = y && \text{$y \neq 0$ et $1+\mathrm{e}^{-x} \neq 0$} \\ &\iff 1+\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{y} \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{y} - 1 \\ &\iff \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \frac{1-y}{y} && \text{$y \neq 1$, donc $\frac{1-y}{y} \neq 0$} \\ &\iff \mathrm{e}^{x} = \frac{y}{1-y} && \text{$y \in]0;1[$ donc $\frac{y}{1-y} > 0$; et injectivité de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

♣ Méthode !
Ici, on revient à la définition de bijection : en trouvant une unique solution à $f(x) = y$, pour chaque $y \in]0;1[$, on démontre que F est bijective et on détermine l'expression de sa bijection réciproque en même temps.
Conseil : si l'ensemble d'arrivée n'est pas donné, faire d'abord un théorème de bijection puis résoudre $f(x) = y$ pour simplement déterminer l'expression de la bijection réciproque.

Conclusion : F est bijective et pour tout $y \in]0;1[$, $F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$.

3. On pose $Y = F(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   3.a. Reconnaître la loi de Y.
   - On a déjà :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= F\big(X(\Omega)\big) \\ &= F(\mathbb{R}) \\ &=]0;1[&& \text{question précédente} \end{aligned}$$

   - Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
     Soit $x \in \mathbb{R}$.
     * Si $x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) && \text{$x \leqslant 0$ et $Y(\Omega) =]0;1[$ donc $[Y \leqslant x] = \varnothing$} \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

     * Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) && \text{$x \geqslant 1$ et $Y(\Omega) =]0;1[$ donc $[Y \leqslant x] = \Omega$} \\ &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned}$$

     * Si $x \in]0;1[$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([F(X) \leqslant x]\big) && \text{F^{-1} est strictement croissante sur $]0;1[$ (car F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$), licite car $F(X)$ et x sont dans $]0;1[$} \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant F^{-1}(x)]\big) \\ &= F\big(F^{-1}(x)\big) \\ &= x \end{aligned}$$

     Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

     On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

     Conclusion : Y suit la loi uniforme sur $]0;1[$.

   3.b. En déduire une fonction **`Python`** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.
   D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} X &= F^{-1}(Y) \\ &= \ln\left(\frac{Y}{1-Y}\right) \end{aligned}$$

   et Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
   Voici donc un programme convenant :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simuleX():
    Y=rd.random()
    X=np.log(Y/(1-Y))
    return X
```

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f_n est une densité de probabilité.

✓ Positivité ?

* Pour tout $x \in [0;1]$, $nx^{n-1} \geqslant 0$. D'où :

$$\forall x \in [0;1],\ f_n(x) \geqslant 0$$

* Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f_n(x) = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$.

✓ Continuité ?

* Sur $]-\infty;0[$ e sur $]1;+\infty[$: f_n est continue sur ces intervalles, car constante sur ces intervalles.
* Sur $[0;1]$: f_n est continue sur $[0;1]$ car polynomiale sur cet intervalle.

Par conséquent, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Important !

Continue sur $[0;1]$ implique la continuité en 0, à droite !
Pour avoir la continuité de f_n en 0, il faudrait vérifier la continuité en 0 à gauche. Mais ce n'est pas nécessaire pur une densité, on ne le fait donc pas ! Le faire démontrerait une méconnaissance du cours !

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$?

* Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_n(x)dx$ convergent et valent 1.
* L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f_n(x)dx$ n'est pas impropre car f_n est continue sur $[0;1]$; et :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 nx^{n-1}dx \\ &= \left[x^n\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$n > 0$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion : f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X_n une variable aléatoire à densité de densité f_n. On dit alors que X_n suit la loi monôme d'ordre n.

2. Reconnaître la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conclusion : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0;1]\right)$ et ainsi :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{12}$$

☞ **Rappel...**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([a;b]\right)$, alors :

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$.

3. Déterminer la fonction de répartition de X_n, notée F_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\left([X_n \leqslant x]\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt \end{aligned}$$

X_n est à densité, de densité f_n

- Si $x < 0$:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$$
$$= 0$$

$x < 0$ donc f_n est nulle sur $]-\infty; x]$

- Si $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt + \int_{0}^{x} f_n(t)dt \\ &= \int_{0}^{x} nt^{n-1}dt \\ &= \left[t^n\right]_0^x \\ &= x^n \end{aligned}$$

relation de Chasles

$x \in [0;1]$

- Si $x > 1$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt + \int_{0}^{1} f_n(t)dt + \int_{1}^{x} f_n(t)dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

relation de Chasles

question 1.
$x > 1$ donc f_n est nulle sur $[1; x]$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Vérification
On vérifie :
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_n(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$
- la continuité de F_n sur $\mathbb{R}$ (car X_n est à densité)

4. Calculer l'espérance et la variance de X_n.
Considérons déjà que $X_n(\Omega) = [0;1]$. Puisque $X_n(\Omega)$ est borné, X_n admet une espérance et une variance.

- **Espérance.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \int_0^1 x f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 nx^n dx \\ &= \left[\frac{nx^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

- **Variance.**
  * Par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur $X_n(\Omega)$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \int_0^1 x^2 f_n(x)dx \\ &= \int_0 1nx^{n+1}dx \\ &= \left[\frac{nx^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

  * Ainsi, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \left(E(X_n)\right)^2 \\ &= \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n(n^2+2n+1) - n^3 - 2n^2}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

5. On considère V_n et W_n deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi que X_n.
On note $M_n = \max(V_n, W_n)$ et $T_n = \min(V_n, W_n)$. On admet que M_n et T_n sont deux variables aléatoires définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

5.a. Démontrer que M_n suit une loi monôme dont on précisera l'ordre.

☞ Rappel...
Pour tous réels a, b, x :

$$\max(a,b) \leqslant x \iff \begin{cases} a \leqslant x \\ b \leqslant x \end{cases}$$

$$\min(a,b) > x \iff \begin{cases} a > x \\ b > x \end{cases}$$

Notons G_n la fonction de répartition de M_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([\max(V_n, W_n) \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([V_n \leqslant x] \cap [W_n \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([V_n \leqslant x]\big)\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) && V_n \text{ et } W_n \text{ sont indépendantes} \\
&= \big(F_n(x)\big)^2 && V_n \text{ et } W_n \text{ ont même loi que } X_n \\
&= \begin{cases} 0^2 & \text{si } x < 0 \\ (x^n)^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} && \text{question 3.} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{2n} & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= F_{2x}(x)
\end{aligned}$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : M_n suit la loi monôme d'ordre $2n$.

5.b. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de V_n et W_n puis en déduire, sans calcul d'intégrale, l'espérance de T_n.
On sait que pour tous réels a, b :

$$\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$$

D'où :

$$M_n + T_n = V_n + W_n$$

Ainsi :

$$T_n = V_n + W_n - M_n$$

Or V_n, W_n et M_n suivent toutes des lois monômes, donc, d'après la question 4., elles admettent une espérance. Ainsi, T_n admet une espérance (comme combinaison linéaire de telles variables aléatoires) et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \mathbb{E}(V_n + W_n - M_n) \\
&= \mathbb{E}(V_n) + \mathbb{E}(W_n) - \mathbb{E}(M_n) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} - \frac{2n}{2n+1} && \text{questions 5.a. et 4.} \\
&= \frac{2n(2n+1) - 2n(n+1)}{(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$.