Interrogation 9
Jeudi 29 janvier 2026

NOM et Prénom ....

Cours

Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On suppose l'existence d'une fonction telle que l'exécution de **simuleX()** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **esperanceX()** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$.

```python
def esperance(X):
    L=[simuleX() for k in range(10000)]
    return sum(L)/len(L)
```

2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **probaX(a,b)** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([a \leqslant X \leqslant b]\big)$.

```python
def probaX(a,b):
    c=0
    for k in range(10000):
        X=simuleX()
        if X>=a and X<=b:
            c=c+1
    return c/10000
```

3. En une phrase, expliquer pourquoi l'hypothèse de l'existence de $\mathbb{V}(X)$ semble nécessaire.
   La loi faible des grands nombres permet de justifier que ce deux programmes répondent aux questions posées ; et celle-ci demande l'hypothèse d'existence de $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 1

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$, on note V la variable aléatoire définie par

$$V = \frac{1}{\sqrt{U}}$$

1. **1.a.** Justifier que V est à valeurs dans $[1,+\infty[$.
   Démontrons :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ \ V(\omega) \in [1;+\infty[$$
   Soit $\omega \in \Omega$. Puisque U suit la loi uniforme sur $]0;1]$, on a
   $$0 < U(\omega) \leqslant 1$$
   Ainsi, par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$:
   $$0 < \sqrt{U(\omega)} \leqslant 1$$
   D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$:
   $$\frac{1}{\sqrt{U(\omega)}} \geqslant 1$$
   Autrement dit :
   $$V(\omega) \geqslant 1$$
   Conclusion : V est à valeurs dans $[1;+\infty[$.

   ♣ Méthode !
   Il est également possible de poser $g : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ de sorte que $V = g(U)$.
   Ainsi, on obtient :
   $$\begin{aligned} V(\Omega) &= g\big(U(\Omega)\big) \\ &= g(]0;1]) \\ &= [g(1); \lim_0 g[\\ &= [1;+\infty[\end{aligned}$$

   1.b. Montrer que la fonction de répartition de V est donnée par :
   $$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$V(\Omega) \subset [1; +\infty[$ et $x < 1$, donc $[V \leqslant x] = \varnothing$

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{U}} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{U} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \frac{1}{x^2}\right]\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{x^2}\right]\right) \\ &= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

stricte décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

stricte croissance de la fonction $.^2$ sur $\mathbb{R}^+$

U est à densité

$U \hookrightarrow \mathcal{U}\big(]0;1]\big)$ et $x \geqslant 1$, donc $\frac{1}{x^2} \in]0;1]$

✘ Attention !

Au moment de remplacer $F_U(z)$, il faut se poser la question de l'ensemble auquel appartient z. En effet, puisque $U \hookrightarrow \mathcal{U}\big(]0;1]\big)$, on a, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$F_U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } z \in]0;1] \\ 1 & \text{si } z \geqslant 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1.c. En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V.

✓ Continuité ?

* Sur $]-\infty; 1[$: F_V est continue sur $]\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle.
* Sur $]1; +\infty[$: F_V est continue sur $]1; +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles continues sur cet intervalle.
* En 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F_V(x) = 0 = F_V(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F_V(x)$$

Donc F_V est continue en 1.

Conclusion : F_V est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ Caractère $\mathscr{C}^1$?

Par des arguments similaires à la continuité, la fonction F_V est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1.

Remarque

En fait, on pourrait dire que F_V est continue sur $[1; +\infty[$ par les mêmes arguments, et donc seulement vérifier ensuite que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F_V(x) = F_V(1)$. C'est juste une habitude de travailler sur les intervalles ouverts pour ce qui est fait ensuite sur le caractère $\mathscr{C}^1$ puis le calcul de f_V.

Par conséquent, la variable aléatoire V est à densité et admet pour densité la fonction f_V définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout $x < 1$:

$$f_V(x) = 0$$

- pour tout $x > 1$:

$$f_V(x) = \frac{2}{x^3}$$

- et (par exemple)

$$f_V(1) = 2$$

Important !

On dérive sur les intervalles ouverts ; et on pose des valeurs "arbitraires positives" en les réels en lesquels F_V n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^1$.
Ici, deux valeurs de $f_V(1)$ sont naturelles : 0 (pour recoller avec le cas $x < 1$) et 2 (pour recoller avec le cas $x > 1$).

Conclusion : la variable aléatoire V est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_V : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. Déterminer si V admet une espérance et une variance, calculer leurs valeurs éventuelles.

- Espérance.

  * On sait que :

V admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_V(x)|\, dx$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x f_V(x)\, dx$ est convergente, car $x \longmapsto x f_V(x)$ est nulle sur $]-\infty; 1[$ et positive sur $[1; +\infty[$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ est convergente

  * Or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente car d'exposant 2 (et $2 > 1$). C'est donc également le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$.

* On en déduit que V admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x)dx \\ &= 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\ &= 2\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{x\to+\infty} \\ &= 2\end{aligned}$$

Rédaction
On tolère cette rédaction uniquement parce-que la convergence de l'intégrale est déjà connue !

Conclusion : V admet une espérance et $\mathbb{E}(V) = 2$.

- Variance.
  * Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$:

    V admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f_V(x)|dx$ est convergente

    si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f_V(x)dx$ est convergente, car $x \longmapsto x^2 f_V(x)$ est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$

    si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x}dx$ est convergente
  * Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est divergente.
  * On en déduit que V n'admet pas de moment d'ordre 2, donc pas variance.

Pour info...
Pour traiter des cas généraux de variables aléatoires suivant une loi de Pareto, on pourra aller regarder les exercices **Ecricome 2025 Appli - Exercice 3** ou, encore mieux, **EML 2020 E - Exercice 3**.

Conclusion : la variable aléatoire V n'admet pas de variance.

On considère une suite $(V_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire M_n en posant :

$$M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$$

On note F_n la fonction de répartition de M_n.

3. 3.a. Montrer que $F_n = (F_V)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \mathbb{P}\big([M_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\max(V_1, \dots, V_n) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [V_i \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([V_i \leqslant x]\big) && \text{indépendance de } V_1, \dots, V_n \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) && V_1, \dots, V_n \text{ ont toutes la même loi que } V \\ &= \big(F_V(x)\big)^n\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \big(F_V(x)\big)^n$.

3.b. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente et la question **1.b.** : $F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

- Si $x < 1$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

- Si $x \geqslant 1$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$. Or, $1 - \dfrac{1}{x^2} \in]-1;1[$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n = 0$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Rappel...
Si $q \in]-1;1[$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
ATTENTION : q ne doit pas dépendre de n, sinon le résultat est en général faux !

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

3.c. Justifier que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

où $F : x \longmapsto 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \neq 1$, donc la fonction F n'est pas une fonction de répartition.

Conclusion : la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

4. Démontrer que la fonction $G : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire W dont la fonction de répartition est G.

✓ **Limites ?**

* $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$.
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$.

✓ **Continuité ?**

* Sur $]-\infty;0[$: la fonction G est continue sur $]-\infty;0[$ car constante sur cet intervalle.
* Sur $]0;+\infty[$: la fonction G est continue sur $]0;+\infty[$ $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$ l'est et que exp est continue sur $\mathbb{R}$.
* En 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Donc, par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1/x^2} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x) = G(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} G(x)$$

Par conséquent, la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$?**

Par des arguments similaires à la continuité, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

✓ **Croissance ?**

* G est croissante sur $]-\infty;0[$
* pour tout $x > 0$,

$$G'(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$$

Donc G est croissante sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent, puisque G est continue en 0, on en déduit que G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Important !

Croissante sur $]a;b[$ et croissante sur $]b;c[$ n'implique pas croissante sur $]a;c[$! Contre-exemple : il suffit de considérer la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Conclusion : G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$.

5.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbb{P}([G_n \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) && \sqrt{n} > 0 \\
&= \mathbb{P}([M_n \leqslant \sqrt{n}x]) \\
&= F_n(\sqrt{n}x) && \text{question 3.a.} \\
&= \left(F_V(\sqrt{n}x)\right)^n \\
&= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } \sqrt{n}x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \sqrt{n}x < 1 \end{cases} && \sqrt{n} > 0 \\
&= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$.

5.b. Conclure que la suite $\left(\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers W.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant 0$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, donc $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et ainsi $G_n(x) = 0$.
  D'où :
$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0 = G(x)$$
- Si $x > 0$:
  Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x$, et donc
$$\begin{aligned} G_n(x) &= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) \end{aligned}$$
  n suffisamment proche de $+\infty$, donc $1 - \dfrac{1}{nx^2} > 0$

  Or :
  ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{nx^2} \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{nx^2} = 0$;
  ✓ $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$.

  D'où :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$$
  Ainsi :
$$n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{x^2}$$
  Par conséquent :
$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = \frac{-1}{x^2}$$
  Et par composition de limites :
$$\lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
  Par conséquent :
$$\forall x > 0, \ \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-1/x^2} = G(x)$$

On a finalement établi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = G(x)$.

Conclusion : la suite $\left(\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers W.

Important !
• x doit être pris dans $\mathbb{R}$ tout entier, car G est continue sur $\mathbb{R}$...
• La disjonction de cas se fait en lien avec la fonction de répartition de la loi limite. La faire selon les cas dans l'expression de $G_n(x)$ n'a aucun sens : les cas ne peuvent pas dépendre de n !

Remarque
Ou continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc en $\dfrac{-1}{x^2}$.