Grand classique
Lois sans mémoire

Définitions 1 — **Lois sans mémoire**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

D1# Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on dit que la loi de X est sans mémoire lorsque :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X > n]\big) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>n]}\big([X > n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X > m]\big)$$

D2# Si $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on dit que la loi de X est sans mémoire lorsque :

$$\forall x, t \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big([X > x]\big) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+t]\big) = \mathbb{P}\big([X > t]\big)$$

Théorème 1 — **Lois sans mémoire discrètes**

Les seules lois sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont les lois géométriques.

★ Démonstration :Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Le résultat à établir se reformule ainsi :

$$\text{la loi de } X \text{ est sans mémoire si, et seulement si : } \exists p \in]0;1[\ / \ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = (1-p)^{k-1}p$$

1. Démontrons que :

$$\text{la loi de } X \text{ est sans mémoire si, et seulement si :}$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X > n]\big) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}\big([X > n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X > n]\big) \times \mathbb{P}\big([X > m]\big).$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>n]}\big([X > n+m]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([X > n] \cap [X > n+m]\big)}{\mathbb{P}\big([X > n]\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([X > n+m]\big)}{\mathbb{P}\big([X > n]\big)} \end{aligned}$$

$m \geqslant 0$, donc $[X > n+m] \subset [X > n]$

Et puisque $\mathbb{P}\big([X > n]\big) \neq 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X>n]}\big([X > n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X > m]\big) \iff \mathbb{P}\big([X > n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X > n]\big) \times \mathbb{P}\big([X > m]\big)$$

D'où l'équivalence voulue.

Détails
Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons $\omega \in [X > n+m]$. Dans ce cas : $X(\omega) > n+m$. Mais $m \geqslant 0$, donc $X(\omega) > n$. Ainsi $\omega \in [X > n]$.
Ce qui prouve :

$$[X > n+m] \subset [X > n]$$

Reformulation : dire "il fait + de 20°et + de 25°" équivaut à dire "il fait + de 25°".

> **Conclusion** : la loi de X est sans mémoire si, et seulement si : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X > n]\big) \neq 0$ ET $\mathbb{P}\big([X > n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X > n]\big) \times \mathbb{P}\big([X > m]\big)$.

2. Ensuite, raisonnons par double-implication.

2.a. Supposons qu'il existe $p \in]0;1[$ tel que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Notons $q = 1 - p$.

2.a.i. Calculons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}\big([X > N]\big)$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$[X > N] = \bigcup_{k=N+1}^{+\infty} [X = k]$$

Puis, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{k \geqslant N+1} \mathbb{P}\big([X = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X > N]\big) &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) \\ &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} q^{k-1}p \\ &= p\sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+N} \\ &= pq^N \frac{1}{1-q} \\ &= q^N \end{aligned}$$

$i = k - (N+1)$

p=1-q

Pour l'oral...
On peut se souvenir de l'expression de $\mathbb{P}\big([X > N]\big)$ dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, que l'on retrouve régulièrement. A l'écrit, on détaille le calcul.

2.a.ii. Concluons que la loi de X est sans mémoire.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Puisque $p \in]0;1[$, on a $q \neq 0$ et donc, d'après ce qui précède, $\mathbb{P}([X > n]) = q^n \neq 0$. Ensuite, puisque $n+m \in \mathbb{N}^*$, d'après le point précédent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > n+m]) &= q^{n+m} \\ &= q^n q^m \\ &= \mathbb{P}([X > n]) \times \mathbb{P}([X > m]) \quad \text{point précédent} \end{aligned}$$

Et d'après la question **1.**, la loi de X est sans mémoire.
Conclusion : la loi de X est sans mémoire.

> **Conclusion :** on a démontré que les lois géométriques sont sans mémoire.

2.b. Supposons que le loi de X est sans mémoire.

♣ L'idée !
On s'aide du résultat voulu...
Si X suit la loi géométrique de paramètre p, alors : $\mathbb{P}([X = 1]) = p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > n]) = q^n$, où $q = 1-p$. Il nous suffira ensuite de retrouver $\mathbb{P}([X = n])$.

2.b.i. Montrer que la suite $\left(\mathbb{P}([X > n])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'existence d'un réel $q \in]0;1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) = q^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la loi de X est sans mémoire, d'après la question **1.**, on a :
$$\mathbb{P}([X > n+1]) = \mathbb{P}([X > 1])\mathbb{P}([X > n])$$
Par conséquent, la suite $\left(\mathbb{P}([X > n])\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\mathbb{P}([X > 1])$.
- En notant $q = \mathbb{P}([X > 1])$, on a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) = \mathbb{P}([X > 0])\, q^n$$
Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}([X > 0]) = 1$. D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) = q^n$$
- Enfin :
  - ⋆ $q \neq 0$, sinon on aurait : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > n]) = 0$: contredit la définition de loi sans mémoire ;
  - ⋆ $q \neq 1$, sinon on aurait $p = 0$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n]) = 0$...

2.b.ii. Démontrons enfin que X suit la loi géométrique de paramètre $p = 1-q$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Puisque X est à valeurs entières, on a :
$$[X \geqslant n] = [X = n] \cup [X > n]$$
Or, les évènements $[X = n]$ et $[X > n]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}([X \geqslant n]) = \mathbb{P}([X = n]) + \mathbb{P}([X > n])$$
- Et ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}([X \geqslant n]) - \mathbb{P}([X > n]) \quad X \text{ est à valeurs entières} \\ &= \mathbb{P}([X > n-1]) - \mathbb{P}([X > n]) \quad \text{résultat précédent, licite car } n-1, n \in \mathbb{N}\ (n \in \mathbb{N}^*) \\ &= q^{n-1} - q^n \\ &= q^{n-1}(1-q) \\ &= q^{n-1}p \end{aligned}$$

Conclusion : X suit la loi géométrique de paramètre p.

> **Conclusion :** on a démontré que les lois sans mémoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont géométriques.

> **Conclusion :** les lois sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont les lois géométriques.

⋆

Théorème 2 — Lois sans mémoire à densité

Les seules lois à densité sans mémoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont les lois exponentielles.

⋆ **Démonstration** : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Notons F_X la fonction de répartition de X.

1. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Montrons que X est sans mémoire.
   - Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > y]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leqslant y]) \\ &= 1 - F_X(y) \\ &= 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}) \quad y \in \mathbb{R}^+ \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \end{aligned}$$
   - Soient $x, t \in \mathbb{R}^+$. D'après le point précédent, on a ainsi $\mathbb{P}([X > x]) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \neq 0$ et ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x+t]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x+t])}{\mathbb{P}([X > x])} \quad t \geqslant 0, \text{ donc } [X > x+t] \subset [X > x] \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > x+t])}{\mathbb{P}([X > x])} \quad \text{point précédent, licite car } x, x+t \in \mathbb{R}^+ \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= \mathbb{P}([X > t]) \quad \text{point précédent, licite car } t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Par conséquent :
$$\forall x,t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big([X>x]\big)\neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X>x+t]\big)=\mathbb{P}\big([X>t]\big)$$
Conclusion : la loi de X est sans mémoire.

Conclusion : les lois exponentielles sont sans mémoire.

2. Supposons que la loi de X est sans mémoire. Supposons également que F_X est dérivable en 0 à droite et $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et notons $\lambda=F_X'(0)$.
Autrement dit, supposons : $\forall x,t\in\mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}\big([X>x]\big)\neq 0$ ET $\mathbb{P}_{[X>x]}\big([X>x+t]\big)=\mathbb{P}\big([X>t]\big)$. Déterminons F_X. Notons $G_X : x\longmapsto 1-F_X(x)$.

☞ Pour info...
On pourrait se dispenser de cette hypothèse si on était en mesure de résoudre l'équation fonctionnelle de Cauchy dans le cas d'une fonction simplement continue : elle est vérifiée par la fonction $x\longmapsto\mathbb{P}\big([X>x]\big)$ (**fonction de survie**). Mais il nous manque une notion importante : la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

2.a. Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Établissons : $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ G_X(x+t)=G_X(x)G_X(t)$.
Soit $t\in\mathbb{R}^+$. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>x]}\big([X>x+t]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([X>x]\cap[X>x+t]\big)}{\mathbb{P}\big([X>x]\big)} && t\geqslant 0,\text{ donc } [X>x+t]\subset[X>x]\\ &= \frac{\mathbb{P}\big([X>x+t]\big)}{\mathbb{P}\big([X>x]\big)}\\ &= \frac{G_X(x+t)}{G_X(x)}\end{aligned}$$
On la loi de X est sans mémoire, donc :
$$\mathbb{P}_{[X>x]}\big([X>x+t]\big)=\mathbb{P}\big([X>t]\big)$$
D'après ce qui précède, on obtient :
$$G_X(x+t)=G_X(x)G_X(t)$$

Conclusion : $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ G_X(x+t)=G_X(x)G_X(t)$.

☞ Pour info...
C'est celle-ci l'équation de Cauchy...

2.b. Déduisons-en que pour tout $x\in\mathbb{R}^+,\ G_X'(x)=-\lambda G_X(x)$.
Soit $x\in\mathbb{R}^+$. D'après la question précédente :
$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ G_X(x+t)=G_X(x)G_X(t)$$
Or F_X est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, donc G_X également puis, en dérivant par rapport à la variable t, on obtient :
$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ G_X'(x+t)=G_X(x)G_X'(t)$$
Puis, en évaluant en $t=0$ (licite car $x\geqslant 0$) :
$$G_X'(x)=G_X(x)G_X'(0)$$
Or $F_X'(0)=\lambda$, donc $G_X'(0)=-\lambda$.

Conclusion : pour tout $x\in\mathbb{R}^+,\ G_X'(x)=-\lambda G_X(x)$.

2.c. Démontrons enfin que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.
- Puisque $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$, on a déjà : $\forall x\in]-\infty;0[,\ F_X(x)=0$.
- D'après la question précédente, la fonction G_X est solution de l'équation différentielle $y'+\lambda y=0$, d'inconnue $y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.
Il existe donc un réel a, que nous considérons ensuite, tel que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ G_X(x)=a\mathrm{e}^{-\lambda x}$. D'où :
$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ F_X(x)=1-a\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Or $X(\Omega)=\mathbb{R}^+$, donc $F_X(0)=0$. Ce qui donne : $a=1$.
Enfin, puisque F_X est une fonction de répartition, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$. Ainsi, nécessairement : $\lambda>0$.

Petite remarque
On peut raisonner rapidement par l'absurde si besoin.

Conclusion : $\exists\lambda\in\mathbb{R}_*^+\ /\ \forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$
On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Conclusion : on a démontré que les lois sans mémoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont des lois exponentielles.

Conclusion : les lois sans mémoire à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sont les lois exponentielles.

⋆