Définition 1 — **Projecteur**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que f est un **projecteur de E** lorsque $f \circ f = f$.

Petite remarque
L'identité et l'endomorphisme nul sont deux projecteurs.

Propriétés 1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E.

P1# $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$

P2# $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id})$

⋆ Démonstration :

P1# Montrons que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Raisonnons par double-inclusion...

$\boxed{\supset}$ Immédiat, puisque $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Montrons que $x = 0$.

- ⋆ Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. Considérons un tel z.
- ⋆ Puisque $x \in \ker(f)$, on a $f(x) = 0$.

Ainsi :
$$f\big(f(z)\big) = 0$$
Mais f est un projecteur, donc $f \circ f = f$. D'où :
$$f\big(f(z)\big) = f(z)$$
Et on obtient alors :
$$f(z) = 0$$
Or $f(z) = x$... D'où :
$$x = 0$$

Conclusion : si f est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

☞ Pour info...
Ce résultat peut aussi se déduire du suivant...

P2# Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id})$. Raisonnons par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $y \in \ker(f - \mathrm{id})$.
Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Considérons un tel x. Ensuite :
$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{id})(y) &= f(y) - y \\
&= f\big(f(x)\big) - f(x) && y = f(x) \\
&= f \circ f(x) - f(x) \\
&= f(x) - f(x) && f \circ f = f \\
&= 0
\end{aligned}$$
Par conséquent :
$$y \in \ker(f - \mathrm{id})$$
D'où :
$$\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f - \mathrm{id})$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \ker(f - \mathrm{id})$. Montrons que $x \in \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $x \in \ker(f - \mathrm{id})$, on a :
$$(f - \mathrm{id})(x) = 0$$
Autrement dit :
$$f(x) = x$$
Par conséquent, x est bien l'image d'un élément de E (lui-même convient). Ainsi :
$$x \in \mathrm{Im}(f)$$
D'où :
$$\ker(f - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Conclusion : si f est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id})$.

⋆

Théorème 1

Tout projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable.

⋆ Démonstration : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E. Montrons que f est diagonalisable.
Distinguons deux cas :

- Si f est l'identité ou l'endomorphisme nul, alors f est diagonalisable.
- Si f n'est ni l'identité ni l'endomorphisme nul.
  - ⋆ Puisque $f \circ f = f$, le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de f. Par conséquent : les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 1.
  - ⋆ Montrons que 0 est valeur propre de f. Autrement dit, montrons que f n'est pas bijectif.
    Raisonnons par l'absurde. Supposons que f est bijectif. Puisque $f \circ f = f$, en composant par f^{-1}, on obtient : $f = \mathrm{id}$. Absurde.
    Par conséquent : f n'est pas bijectif et donc 0 est valeur propre de f.
  - ⋆ Montrons que 1 est valeur propre de f. Autrement dit, montrons que $f - \mathrm{id}$ n'est pas bijectif.
    Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f - \mathrm{id}$ est bijectif. Puisque $f \circ f = f$, on a $(f - \mathrm{id}) \circ f = 0$. D'où, en composant par $(f - \mathrm{id})^{-1}$, on obtient : $f = 0$. Absurde.
    Par conséquent : $f - \mathrm{id}$ n'est pas bijectif et donc 1 est valeur propre de f.
  - ⋆ 0 et 1 sont donc les valeurs propres de f ; et notons $E_0(f)$ et $E_1(f)$ les espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 respectivement.
    On a en fait :
    $$E_0(f) = \ker(f)$$
    Et :
    $$\begin{aligned} E_1(f) &= \ker(f - \mathrm{id}) \\ &= \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$
    propriétés 1 - P2

    Or, d'après le théorème du rang :
    $$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\ker(f)\big) = \dim(E)$$
    D'où :
    $$\dim\big(E_1(f)\big) + \dim\big(E_0(f)\big) = \dim(E)$$
    Conclusion : f est diagonalisable.

Petite remarque

On conclut ici en utilisant la CNS de diagonalisabilité qui est HP. On pourrait s'en passer en raisonnant autrement (mais c'est plus long) :
- on note $d_1 = \dim\big(E_1(f)\big)$ et $d_0 = \dim\big(E_0(f)\big)$
- il existe une famille libre (et même une base) de $E_1(f)$ de cardinal d_1, de même pour $E_0(f)$, de cardinal d_0
- la concaténation de ces deux familles libres est libre (concaténation de familles libres de $\overrightarrow{\text{VP}}$ associés à des VP différentes) ; et elle est de cardinal $d_1 + d_0$
- enfin, par théorème du rang, $d_1 + d_0 = \dim(E)$... donc la famille mise en évidence est libre et de cardinal égal à la dimension de E : c'est donc une base de E
- il existe donc une base de E constituée de $\overrightarrow{\text{VP}}$ de f : f est donc diagonalisable.

⋆