Python 5
Commandes sur les matrices

Nous aurons besoin de la bibliothèque **numpy**, abrégée en **np**, ainsi que de la bibliothèque **numpy.linalg** à importer ainsi :

```
import numpy.linalg as al
```

Syntaxe	Ce qu'elle renvoie
`np.zeros([n,p])`	matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont 0
`np.ones([n,p])`	matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont 1
`np.eye(n)`	matrice identité de taille n
`np.array([L1,L2,...,Ln])` (où `L1`,...,`Ln` sont des listes)	matrice dont la première ligne vaut `L1`, la seconde `L2`, ...
`np.diag(L)`	la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les éléments de la liste `L`
`np.shape(A)`	le couple (n,p) où n est le nombre de lignes et p de colonnes de A
`A[i,j]`	le coefficient (i,j) du tableau (donc le coefficient $(i+1,j+1)$ de la matrice A)
`A[i,:]`	la i-ème ligne du tableau
`A[:,j]`	la j-ème colonne du tableau
`A[i,a:b]`	un tableau constitué des coefficients de la i-ème ligne, des colonnes a à $b-1$
`A[a:b,j]`	un tableau constitué des coefficients de la j-ème colonne, des lignes a à $b-1$
`A+B` (si A et B sont deux matrices de même taille)	la matrice $A+B$
`A*B` (si A et B sont deux matrices de même taille)	la matrice dont le coefficient (i,j) est le produit des coefficients (i,j) de A et B : PAS LA MATRICE AB !
`np.dot(A,B)` (si compatibilité...)	la matrice AB
`A**2`	la matrice dont les coefficients de A sont élevés au carré : PAS LA MATRICE A^2 !
`al.matrix_power(A,k)` (si A est carrée)	la matrice A^k
`np.transpose(A)`	la matrice ${}^tA$
`al.inv(A)` (si A est inversible)	la matrice A^{-1}
`A==B` (si A et B sont deux matrices de même taille)	la matrice composée de booléens : `True` si les coefficients (i,j) de A et B sont égaux, `False` sinon.
`(A==B).all()`	`True` si A et B sont égales, `False` sinon.
`al.matrix_rank(A)`	le rang de A
`al.solve(A,B)` (si A est inversible et si compatibilité)	l'unique solution de l'équation $AM=B$ d'inconnue M (où B peut être une matrice colonne ou non)
`al.eig(A)` (si A est carrée)	un couple `(V,P)` où `V` est un tableau ligne des valeurs propres de A et `P` un tableau de vecteurs propres associés

Exemple

Si on veut $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, on saisit :
`np.array([[1,2,3],[4,5,6]])`
Une matrice est en fait une liste de listes transformée en tableau.

✘ Attention !

Comme pour les listes, la numérotation des lignes et colonnes d'une matrice commence à 0.

Remarque

Plus généralement, si f est une fonction définie sur les listes et tableau (`np.exp`, `np.log`,...), alors $f(A)$ renvoie la matrice dont le coefficient (i,j) et l'image par f du coefficient (i,j) de A.)

Précisions...

- Les vecteurs propres donnés sont *normés*...
- Si A est diagonalisable, alors P sera une matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&-11&6\end{pmatrix}$.

1. À l'aide de **Python**, calculer $A^3-6A^2+11A-6I_3$.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[6,-11,6]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)
I=np.eye(3)
print(A3-6*A2+11*A-6*I)
```

2. En déduire que A est inversible. À l'aide de **Python**, calculer et afficher A^{-1} de deux façons différentes.
D'après la question précédente :

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0_3$$

D'où :

$$A^3 - 6A^2 + 11A = 6I_3$$

Et ainsi :

$$A\left(\frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)\right) = I_3$$

Conclusion : la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3)$.

Puis, à la suite du programme précédent :

```
invA=al.inv(A)
invAbis=1/6*(A2-6*A+11*I)
print(invA)
print(invAbis)
```

3. Sans utiliser la commande `al.eig`, déterminer les valeurs propres de A.

♣ Indication...
Quelles sont les caractérisations des VP ?

```
#les racines du polynôme X^3-6X^2+11X-6 (annulateur de A) sont 1,2,3
#sont-elles bien valeurs propres ?

for x in [1,2,3]:
    if al.matrix_rank(A-x*I)!=3:
        print(x,"est valeur propre de A")
    else:
        print(x,"n'est pas valeur propre de A")
```

4. Sans exécuter les lignes suivantes, sachant que la commande `al.eig(A)[0]` renvoie `array([1,2,3])`, quelle devrait être la matrice affichée à l'issue de l'exécution ?

```
P=al.eig(A)[1]
invP=al.inv(P)
B=np.dot(invP,np.dot(A,P))
print(B)
```

On aura $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

En effet :

- `al.eig(A)[0]` renvoie un tableau composé des valeurs propres de A : il y en a 3 différentes, A est donc diagonalisable...
- et dans ce cas, `al.eig(A)[1]` renvoie un tableau composé si possible d'une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres (dans le même ordre)... Puisqu'ici A est diagonalisable, ce tableau est la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres.

Par formule de changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale constituée des valeurs propres de A.

Remarque
Résultat hors programme qu'il faut savoir redémontrer rapidement dans un cas théorique si besoin.