

Ce document donne une liste de questions de cours tombées, ou qui peuvent tomber, à l'oral d'HEC. Il est bien évident que la connaissance du cours est nécessaire à la réussite des concours, y compris des épreuves Ecrircome, EML, EDHEC ! **A travailler constamment.**

Conseil important. Dans bon nombre de questions de cours, les notations ne sont pas introduites. C'est donc à toi, candidate ou candidat à l'oral d'HEC, de le faire ! Cela peut être fait à l'oral ; en revanche, le reste de la question (définition, théorème [hypothèse(s) + résultat(s)],...) doit être écrit au tableau.

FOURRE-TOUT

1. Nombre de racines d'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

- P admet au plus n racines (en comptant leurs multiplicités)
- Si P admet au moins $n + 1$ racines (en comptant leurs multiplicités), alors P est la fonction polynomiale nulle.

Vocabulaire

La multiplicité d'une racine a de P est le plus grand entier m par lequel $(x - a)^m$ factorise P .

À retenir...

En particulier, si une fonction polynomiale admet une infinité de racines, alors c'est la fonction polynomiale nulle.

2. Que peut-on dire du degré de la somme et d'un produit de deux fonctions polynomiales ?

Soient P et Q deux fonctions polynomiales.

- $P + Q$ est une fonction polynomiale et $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- $P \times Q$ est une fonction polynomiale et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

3. Définition et propriétés de $\binom{n}{k}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- **Définition.** $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
- **Propriétés.**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} ; \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Petites remarques

• La dernière égalité (relation de Pascal) est bien encore valable si $k = n$, car par convention : $\binom{n}{n+1} = 0$. On pourrait donner également des valeurs remarquables : $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

4. Formule du binôme de Newton.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

⚠ Attention !

Dans sa version matricielle, les deux matrices en jeu doivent commuter.

5. Définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

Soient E, F, G trois ensembles ainsi que $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- **Définition.** On dit que f est bijective de E dans F lorsque : $\forall y \in F, \exists ! x \in E / y = f(x)$.
- **Propriété.** Si f est bijective de E dans F et g bijective de F dans G , alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

📖 Rappels...

- f est injective lorsque : $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies x = x')$
- f est surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E / y = f(x)$

À retenir...

Soient $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ deux ensembles (qui peuvent être égaux). Créer une bijection de E dans F c'est :
 • associer à e_1 un élément de F : n choix,
 • associer à e_2 un élément de F différent du précédent : $n - 1$ choix,
 ...
 • associer à e_n le seul élément de F restant : 1 choix.

6. Nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Il y a $n!$ bijections différentes d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

ANALYSE

SUITES

7. Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; et soit Δ le discriminant associé à l'équation $x^2 - ax - b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une seule solution x_0 et

$$\exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) x_0^n$$

Vocabulaire

L'équation $x^2 - ax - b = 0$ est appelée équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8. Définition de la convergence d'une suite. Définition d'une suite ayant pour limite $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- **Définition.** On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

- **Définition.** On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \geq A)$$

★ Subtil... ★

Ne pas confondre les définitions de " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge" et " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ..."

Petite remarque

Dans les deux définitions, au lieu d'écrire " $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \dots)$ ", on pourrait écrire " $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \dots$ ".

9. Convergence et divergence des suites réelles monotones.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Petite remarque

En fait, toute suite monotone admet une limite (finie ou infinie).

10. Suites adjacentes.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels.

- **Définition.** On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque :
 - ✓ l'une de ces suites est croissante,
 - ✓ l'autre est décroissante,
 - ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
- **Propriété.** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Petite remarque

Bien évidemment, les rôles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont échangeables.

✗ Attention !

ELLES CONVERGENT !
On entend souvent le seul résultat "elles ont même limite"...

11. (Chapitre 2) Définir le fait qu'une suite est négligeable devant une autre au voisinage de $+\infty$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

📘 Pour info...

Plus généralement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$,
- $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n$.

12. (Chapitre 2) Définir le fait que deux suites sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

📘 Pour info...

Plus généralement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$,
- $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n$.

📘 Rappel...

Puisque $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, on dit " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes".

À retenir...

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \end{aligned}$$

13. Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Vocabulaire

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Confusion d'objets !

- $\sum_{n \geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n : c'est donc une suite.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelé somme de la série de terme général u_n , c'est la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$: c'est donc un réel.

14. Convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- **Définition.** On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.
- **Propriété.** Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Rappel...

On sait que la réciproque est fausse... Exemple avec $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ qui est convergente (comment le démontrer ?), mais n'est pas absolument convergente...

15. Convergence et sommes des séries géométriques.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

Les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1; 1[$ et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} ; \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} ; \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

16. (Chapitre 2) Donner les critères de comparaison de séries à termes positifs.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels.

- Par inégalité :

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \right)$$

- Par négligeabilité :

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \right)$$

- Par équivalence :

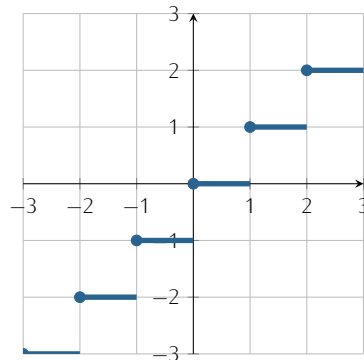
$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature} \right)$$

Petite remarque

Tous sont évidemment valables (et à adapter légèrement) dans le cas où les suites ne sont définies qu'à partir d'un autre rang que 0.

17. Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

- **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x , notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier qui soit inférieur ou égal à x .
De façon équivalente, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- **Représentation graphique.**



Petite remarque

On précise les points (à gauche des segments), ce qui exclut ceux de droite.

18. Définition quantifiée de fonction ayant pour limite $+\infty$ en un réel a .

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une extrémité de I et f une fonction définie sur I .
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 / \forall x \in I, (x \in [a - \delta; a + \delta] \implies f(x) \geq A)$$

Autrement dit :

On prend seulement les x dans $I \cap [a - \delta; a + \delta]$.
L'information ' $x \in [a - \delta; a + \delta]$ ' est équivalente à ' $|x - a| \leq \delta$ '.

19. Définition quantifiée de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I .
On dit que f est continue en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in I, (x \in [a - \delta; a + \delta] \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

Rappel...

f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$...

20. Notion de prolongement par continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

- **Définition.** On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque f possède une limite finie en a .

- **Propriété.** Si f est continue sur $I \setminus \{a\}$ et prolongeable par continuité en a , alors la fonction

$$\tilde{f} : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases} \text{ est continue sur } I.$$

21. Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Caractérisation dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

- **Définition.** f est convexe sur I lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0; 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- **Propriété.** Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , alors

$$\begin{aligned} (f \text{ est convexe sur } I) &\iff (f' \text{ est croissante sur } I) \\ &\iff (\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de ses tangentes sur } I) \\ &\iff (\forall x \in I, f''(x) \geq 0) \end{aligned}$$

À retenir...

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0; 1]\}$$

Petite remarque

Seule la dernière caractérisation suffit probablement (les deux précédentes sont d'ailleurs vraies dès que f est $\mathcal{C}^1$ sur I).

22. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Que signifie graphiquement le fait que a soit un point d'inflexion de la courbe représentative de f ? Quelles sont les méthodes pour le calculer?

- **Définition.** Le point de coordonnées $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f lorsque f change de convexité en a .
- Trois possibilités pour montrer que $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion en $(a, f(a))$:
 - * revenir à la définition de convexité / concavité ;
 - * si f est $\mathcal{C}^1$: étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en $(a, f(a))$ et montrer que $\mathcal{C}_f$ traverse cette tangente ;
 - * si f est $\mathcal{C}^2$: déterminer les réels en lesquels f'' s'annule en changeant de signe (qui sont alors les points d'inflexions).

23. Théorème des valeurs intermédiaires.

Deux versions :

- **Versión 1.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction définie sur $[a; b]$.
Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors tous les réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possèdent au moins un antécédent dans $[a; b]$ par f .
Autrement dit, si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$, d'inconnue $x \in [a; b]$, possède au moins une solution sur $[a; b]$.
- **Versión 2.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Petite remarque

Encore valable si l'intervalle n'est pas un segment : considérer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ à la place de $f(a)$ et/ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ à la place de $f(b)$.

24. Théorème de la bijection.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

Si f est :

- ✓ continue sur I ,
- ✓ strictement monotone sur I .

Alors : f est bijective de I dans $f(I)$.

De plus, f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $J = f(I)$, de même monotonie que f ; et leurs courbes sont symétriques (dans un repère orthonormé du plan) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Petite remarque

$f(I)$ est un intervalle car I l'est et que f est continue sur I (TVI).

Pour info...

Le fait que $f(I)$ soit un intervalle est garanti par le TVI...

25. Inégalité des accroissements finis.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $M \in \mathbb{R}^+$.

Si :

- ✓ f est dérivable sur I ,
- ✓ $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$.

Alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M|b - a|$$

Petite remarque

On pourrait introduire M en début de la deuxième hypothèse par " $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \dots$ ", mais bien souvent ce M est connu, donc l'énoncé donné fournit la rédaction à adopter en pratique.

26. (Chapitre 5) Négligeabilité de deux fonctions au voisinage d'un réel.

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

On dit que f est négligeable devant g en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

27. (Chapitre 5) Définir le fait que deux fonctions soient équivalentes au voisinage d'un réel a .

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler en a).

On dit que f et g sont équivalentes en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

À retenir...

$$\begin{aligned} f(x) &\sim_{x \rightarrow a} g(x) \\ \iff f(x) &= g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x)) \\ \iff f(x) &= g(x) + o_{x \rightarrow a}(f(x)) \end{aligned}$$

28. (Chapitre 10) Développement limité en un réel a . Exemples de développements limités en 0.

- **Définition.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a (pas nécessairement en a).

- * f admet un **développement limité d'ordre 0 en a** lorsqu'il existe un réel a_0 tel que, au voisinage de a

$$f(x) = a_0 + o_{x \rightarrow a}(1)$$

- * f admet un **développement limité d'ordre 1 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1 tels que, au voisinage de a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

- * f admet un **développement limité d'ordre 2 en a** lorsqu'il existe des réels a_0, a_1, a_2 tels que, au voisinage de a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + o_{x \rightarrow a}((x - a)^2)$$

- Exemples.

$$* e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$* \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$* \forall a \in \mathbb{R}, (1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Petite remarque

On peut se contenter de donner la définition de $DL_2(a)$. À adapter si on demande la définition de $DL_2(0)$.

29. (Chapitre 10) Formule de Taylor-Young.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction définie sur I .

- Si f est $\mathcal{C}^1$ sur I , alors f admet un $DL_1(a)$ et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

- Si f est $\mathcal{C}^2$ sur I , alors f admet un $DL_2(a)$ et

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o_{x \rightarrow a}(x - a)^2$$

30. (Chapitre 13) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition d'un point critique de f , et donner une condition suffisante pour que f possède un extremum local en ce point.

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in D$.

- **Définition.** On dit que M_0 est un point critique de f lorsque $\nabla f(M_0) = 0_{2,1}$.

Autrement dit, (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque $\begin{cases} \partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \\ \partial_2 f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

- Si :

- ✓ D est un ouvert,
- ✓ (x_0, y_0) est un point critique de f ,
- ✓ les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ sont strictement positives (respectivement strictement négatives).

Alors : f admet un minimum local (respectivement maximum local) en (x_0, y_0) .

Petites remarques

- si les VP sont non nulles et de signes opposés : point col.
- si au moins une des VP est nulle : on ne peut pas conclure.

INTÉGRALES

31. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Donner les propriétés de l'application

$$x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.
La fonction F est en fait l'unique primitive de f s'annulant en a .

32. Intégration par parties.

Soient a, b des réels tels que $a < b$ ainsi que u et v des fonctions définies sur $[a; b]$.
Si u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a; b]$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

✗ Attention !
Seulement sur les segments !!

33. (Chapitre 6) Définition de la convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a; +\infty[$.

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

34. (Chapitre 6) Donner les critères de comparaison sur les intégrales impropres.

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; +\infty[$.

• Par inégalité :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a; +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in [a; +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t) \\ \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente} \right)$$

• Par négligeabilité :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(g(t)) \\ \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(g(t)) \\ \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente} \right)$$

• Par équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a; +\infty[\\ f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ ont même nature} \right)$$

35. (Chapitre 6) Convergence des intégrales de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$
- l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$

Important !
On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est toujours divergente.
On retient également que les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ sont divergentes

36. (Chapitre 15) Principe de superposition.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions f_1 et f_2 définies et continues sur I .
Si :

- ✓ y_1 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = f_1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$,
- ✓ y_2 est solution de l'équation différentielle $y' + ay = f_2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Alors : pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Petite remarque

Encore valable et à adapter dans le cas des EDL2 et SDL.

37. (Chapitre 15) Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée.

Notons S_E l'ensemble des solutions de E , S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

- S_H est un espace vectoriel.
- Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

solution générale de l'EDL	=	solution particulière de l'EDL	+	solution générale de l'équation homogène associée
----------------------------	---	--------------------------------	---	---

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H \mid f_H \in S_H\}$$

38. (Chapitre 15) Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$(f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit :

$$\text{l'ensemble des solutions de } y'' + ay' + by = 0 \text{ est } \{x \in I \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$(f \text{ est solution de l'EDL2 } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x})$$

Autrement dit :

$$\text{l'ensemble des solutions de } y'' + ay' + by = 0 \text{ est } \{x \in I \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Vocabulaire

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique associée à l'EDL $y'' + ay' + by = 0$.

39. (Chapitre 15) Structure de l'ensemble des solutions d'un système différentiel linéaire.

Soient (E) un système différentiel linéaire de taille n et (E_H) son système différentiel linéaire homogène associé.

Notons S_E l'ensemble des solutions de E , S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

- S_H est un espace vectoriel.
- Si $t_0 \in I$, alors l'application $f : \begin{cases} S_H & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto X(t_0) \end{cases}$ est un isomorphisme.
- Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

solution générale du SDL	=	solution particulière du SDL	+	solution générale du SDL homogène associé
--------------------------	---	------------------------------	---	---

Ou encore, en notant X_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{X_p + X_H \mid X_H \in S_H\}$$

40. (Chapitre 15) Équilibre d'un système différentiel : définition et caractérisation.

- **Définition.** Un équilibre d'un système différentiel linéaire est une solution constante de ce système différentiel.
- **Propriété.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
La fonction $t \mapsto Y_0$ est un équilibre de $X' = AX$ si, et seulement si $Y_0 \in \ker(A)$.

À retenir...

Si A est inversible, alors la fonction $t \mapsto 0_{n,1}$ est le seul équilibre de $X' = AX$.

41. (Chapitre 15) Définition d'un problème de Cauchy dans le cas d'une EDL1 / d'une EDL2 / d'un SDL,

- **Cas d'une EDL1.**
Soient a un réel, b une fonction continue sur I . On appelle problème de Cauchy un problème de la forme $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
- **Cas d'une EDL2.**
Soient a, b des réels et c une fonction continue sur I . On appelle problème de Cauchy un problème de la forme $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, où $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.
- **Cas d'un SDL.**
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On appelle problème de Cauchy un problème de la forme $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$, d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Important !

Dans tous les cas, un problème de Cauchy admet toujours une et une seule solution.

Hors programme ?

Les systèmes différentiels linéaires non homogènes semblent être hors programme... Dans le doute...

PROBABILITÉS

42. Probabilité : définition et propriétés.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

- **Définition.** Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- ✓ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- ✓ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$

est convergente et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- **Propriétés.** Pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$:

- * $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

- * Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

- * **Formules de Poincaré** (ou du crible) :

- × $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- × $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

43. Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Petite remarque

En regardant la formule il faudrait comme hypothèse que les probabilités de tous les événements par lesquels on conditionne soient non nulles.

$\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k$ est inclus dans tous les précédents, le fait que sa probabilité soit non nulle garantit que les autres probabilités le sont également.

44. Formule des probabilités totales.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de $\mathcal{A}$, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum \mathbb{P}(A_n \cap B)$ est convergente et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

Petite remarque

◀ A adapter dans le cas d'une famille finie d'événements.

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

45. Loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$: définition, modèle, propriétés.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

- **Définition.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$) lorsque :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad ; \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{n}$$

- **Modèle.** En considérant :

- ✓ une expérience comportant n issues équiprobables numérotées de 1 à n ;

- ✓ une variable aléatoire X qui prend comme valeur le numéro de l'issue obtenue ;

la variable aléatoire X suit alors la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

- **Propriétés.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

46. Loi de Bernoulli et loi binomiale : définitions, modèles, propriétés.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

• Loi de Bernoulli.

- ★ **Définition.** Soit $p \in]0; 1[$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) lorsque :

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p$$

★ **Modèle.** En considérant :

- ✓ une expérience à deux issues, dont une, appelée "succès", est de probabilité p (appelée épreuve de Bernoulli) ;
- ✓ une variable aléatoire X qui prend comme valeur 1 en cas de succès, et 0 sinon ;

la variable aléatoire X suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p .

- ★ **Propriétés.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = p \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

• Loi binomiale.

- ★ **Définition.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$) lorsque :

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad ; \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

★ **Modèle.** En considérant :

- ✓ une expérience consistant en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p ;
- ✓ une variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de succès obtenus ;

la variable aléatoire X suit alors la loi binomiale de paramètres n et p .

- ★ **Propriétés.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$, alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = np \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

• Propriété.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$$

ES Rappel...

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ (autrement dit, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est un évènement).

47. Loi géométrique : définition, modèle, propriétés.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

- **Définition.** Soit $p \in]0; 1[$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = p(1 - p)^{k-1}$$

• **Modèle.** En considérant :

- ✓ une expérience consistant en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p ;
- ✓ une variable aléatoire X qui prend comme valeur le rang du premier succès ;

la variable aléatoire X suit alors la loi géométrique de paramètre p .

- **Propriétés.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

★ Subtil... ★

En fait, ce modèle ne définit pas X partout, mais seulement presque-partout !
En effet, de la sorte, l'issue ne fournissant que des échecs n'a pas d'image par X . Mais, l'évènement "n'obtenir que des échecs" étant de probabilité nulle, on a défini X presque-partout...

48. Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace.

- **Définition.** La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0, 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$.
- **Propriétés.**
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
 - * F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - * $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
 - * Pour tout $x \in X(\Omega)$, F_X est continue à droite en x et admet une limite finie à gauche en x .
 - * La fonction de répartition caractérise la loi.
 - * F_X est constante par morceaux.

À retenir...

F_X est nulle "avant $X(\Omega)$ " et égale à 1 "après $X(\Omega)$ ".

À retenir...

Les 5 premières propriétés sont valables pour toutes les fonctions de répartition ; peu importe la nature de la variable aléatoire. La dernière n'est valable que pour les VA discrètes.

49. Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace.

- On dit que la variable aléatoire X admet une espérance lorsque la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente.
Le cas échéant, l'espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est la somme de cette série.
- Si X admet une espérance, on dit qu'elle admet une variance lorsque la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, la variance de X , notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.

50. Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire discrète.

Théorème de transfert. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente et dans ce cas $\mathbb{E}(g(X))$ est la somme de cette série.

51. Définition du moment d'ordre r d'une variable aléatoire discrète.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance.

Le cas échéant, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$ et par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbb{P}(X = x)$$

52. Formule de Koenig-Huygens.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace

- X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2 ;
- Si X admet une variance, alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Petite remarque

On pense à inclure cette équivalence, ça ne coûte pas grand chose...

53. (Chapitre 3) Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Loïs marginales et conditionnelles.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.

- **Loi jointe.** La loi jointe du couple (X, Y) est l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ (x, y) & \longmapsto \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{cases}$$

- **Lois marginales.**

- * La première loi marginale de (X, Y) est la loi de X .
- * La seconde loi marginale de (X, Y) est la loi de Y .

- **Lois conditionnelles.**

- * Soit $y \in Y(\Omega)$. Si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, alors la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application

$$\begin{cases} X(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \end{cases}$$

- * Soit $x \in X(\Omega)$. Si $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, alors la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est l'application

$$\begin{cases} Y(\Omega) & \longrightarrow [0; 1] \\ y & \longmapsto \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \end{cases}$$

Petite remarque

On peut se contenter de présenter les lois marginales et conditionnelles au tableau pour une seule des deux VA du couple ; et mentionner que les autres se font de façon analogue.

54. (Chapitre 3) Indépendance de variables aléatoires discrètes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que X et Y sont indépendantes lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

- Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

55. (Chapitre 3) Lemme des coalitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **Cas de deux variables aléatoires.** Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y .

- **Cas de n variables aléatoires.** Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Petite remarque

On peut ne présenter que le second résultat, qui inclut le premier (dans le cas $n = 2$).

56. (Chapitre 3) Stabilité de la loi binomiale.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **Cas de deux variables aléatoires.** Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1; p) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2; p) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$$

- **Cas de N variables aléatoires.** Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall N \in \mathbb{[2; +\infty[}, \sum_{k=1}^N X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$$

Petite remarque

On peut ne présenter que le second résultat, qui inclut le premier (dans le cas $N = 2$); ou seulement le premier, qui devrait satisfaire le jury, en mentionnant que c'est encore le cas de n variables aléatoires.

⚠ Attention !

Par souci de place, j'écris "VA" pour "variables aléatoires". Sur la copie, pas d'abréviation !

57. (Chapitre 3) Stabilité de la loi de Poisson.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **Cas de deux variables aléatoires.** Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- **Cas de n variables aléatoires.** Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$$

Petite remarque

On peut ne présenter que le second résultat, qui inclut le premier (dans le cas $n = 2$); ou seulement le premier, qui devrait satisfaire le jury, en mentionnant que c'est encore le cas de n variables aléatoires.

⚠ Attention !

Par souci de place, j'écris "VA" pour "variables aléatoires". Sur la copie, pas d'abréviation !

58. (Chapitre 3) Espérance d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes.

Théorème de transfert. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.

La variable aléatoire $f(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbb{E}(f(X, Y))$ est la somme de cette série.

59. (Chapitre 3) Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes. Cas d'indépendance.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.

- **Définition.** La variable aléatoire XY admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbb{E}(XY)$ est la somme de cette série.

- **Propriétés.**

- * Si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.
- * Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Important !

Il faut avoir une idée de la démonstration de ce résultat, basée sur l'inégalité :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

60. (Chapitre 3) Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.

- **Définition.** La covariance du couple (X, Y) est le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par (si existence) :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X)) (Y - \mathbb{E}(Y)) \right)$$

- **Propriétés.** Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.
 - * Si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors (X, Y) admet une covariance.
 - * $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *(formule de Koenig-Huygens)*
 - * $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$
 - * $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ *(symétrie)*
 - * $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$ *(linéarité à gauche)*
 - * $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$ *(linéarité à droite)*
 - * $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0$
 - * Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

✗ Attention !

On sait que la réciproque de la dernière propriété est fausse...

Vocabulaire

On dit que X et Y sont non corrélées lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

61. (Chapitre 3) Définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur cet espace.

- **Définition.** Si X et Y admettent chacune une variance non nulle, le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- **Propriétés.** Si X et Y admettent chacune une variance non nulle, alors :
 - * $\rho(X, X) = 1$ et $\rho(X, -X) = -1$;
 - * si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$;
 - * $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;
 - * $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;
 - * $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre ;
 - * $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.

62. (Chapitre 8) Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

- **Définition.** La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow [0; 1] \\ x & \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$.
- **Définition.** On dit que la variable aléatoire X est à densité lorsque sa fonction de répartition est :
 - ✓ continue sur $\mathbb{R}$,
 - ✓ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- **Propriétés.**
 - * $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
 - * F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - * $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
 - * La fonction de répartition caractérise la loi.

À retenir...

F_X est nulle "avant $X(\Omega)$ " et égale à 1 "après $X(\Omega)$ ".

63. (Chapitre 7) Définition d'une densité de probabilité.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On dit que f est une densité de probabilité lorsque :

- ✓ f est positive sur $\mathbb{R}$,
- ✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- ✓ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1,

★ Subtil... ★

Ne pas confondre "définition d'une densité de probabilité" et "densité d'une variable aléatoire à densité".

64. (Chapitre 8) Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité définie sur cet espace, de densité f_X .

- On dit que la variable aléatoire X admet une espérance lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$ est absolument convergente.
Le cas échéant, l'espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$$

- Si X admet une espérance, on dit qu'elle admet une variance lorsque la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance.
Dans ce cas, la variance de X , notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.

Petite remarque

Même définition de variance que dans le cas d'une VA discrète.

65. (Chapitre 8) Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire à densité.

Théorème de transfert. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X une variable aléatoire à densité définie sur cet espace et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Si f_X est une densité de X nulle en dehors de $X(\Omega)$ et si g est continue sur $X(\Omega)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$ est absolument convergente. Le cas échéant :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{X(\Omega)} g(t)f_X(t)dt$$

✗ Attention !

Ne pas oublier la continuité de g , nécessaire dans la version "à densité", mais pas dans la version "discrète".

66. (Chapitre 8) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à densité, de densité f_X , définie sur cet espace et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque X^r admet une espérance. Le cas échéant, le moment d'ordre r est $\mathbb{E}(X^r)$ et par théorème de transfert (licite car $t \mapsto t^r$ est continue sur $\mathbb{R}$) :

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t) dt$$

67. (Chapitre 12) Définition et propriétés de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

- **Définition.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$) lorsqu'elle admet pour densité la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Propriétés.**

- * Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, alors sa fonction de répartition est la fonction

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- * Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Petite remarque

On définit de la même façon les lois uniformes sur $[a; b]$, $]a; b]$ et $]a; b[$, qui sont en fait toutes les mêmes (elles ont toutes la même fonction de répartition et des densités qui ne diffèrent entre elles qu'en un nombre fini de points).

68. (Chapitre 12) Définition et propriétés de la loi exponentielle.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

- **Définition.** Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$) lorsqu'elle admet pour densité la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Propriétés.**

- * Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est la fonction

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- * Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

69. (Chapitre 12) Définition et propriétés des lois normales.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires définies sur cet espace.

- **Définitions.**

- * On dit que X suit la loi normale centrée réduite (on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$) lorsqu'elle admet pour densité la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- * Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que Y suit la loi normale de paramètre μ et σ^2 (on note $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$) lorsqu'elle admet pour densité la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$.

- **Propriétés.**

- * On a :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff \frac{Y-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

- * Si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors Y admet une espérance et une variance ; et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu ; \quad V(Y) = \sigma^2$$

- * En notant Φ la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

- * Stabilité des lois normales : voir question 71.

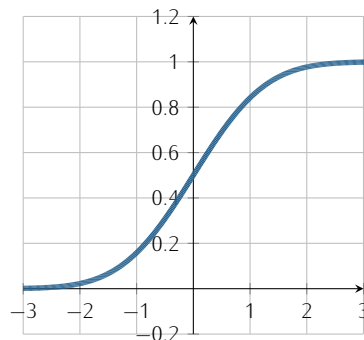
70. (Chapitre 12) Propriétés et allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

- **Propriétés.**

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

- **Représentation graphique.**



71. (Chapitre 12) Stabilité de la loi normale.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- **Stabilité par transformation affine.** Soient X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \implies aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b; a^2\sigma^2)$$

- **Stabilité par somme, cas de deux variables aléatoires.** Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1^2) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2^2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Stabilité par somme, cas de n variables aléatoires.** Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels et $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_k; \sigma_k^2) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array} \right\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^n \mu_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)$$

À retenir...

Une transformée affine / une somme / une combinaison linéaire de VA indépendantes suivant une loi normale suit encore une loi normale. Les paramètres étant l'espérance et la variance, ils sont aisés à retrouver !

Petite remarque

On peut ne présenter que le troisième résultat, qui inclut le premier (dans le cas $n = 2$) ; ou seulement le second, qui devrait satisfaire le jury, en mentionnant que c'est encore le cas de n variables aléatoires.

Attention !

Par souci de place, j'écris 'VA' pour 'variables aléatoires'. Sur la copie, pas d'abréviation !

CONVERGENCE, APPROXIMATION ET ESTIMATEURS

72. (Chapitre 14) Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Cas des variables aléatoires discrètes.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n .

- **Définition.** On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X lorsque, pour tout x où F_X est

continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- **Caractérisation dans le cas "discret" → "discret" dans $\mathbb{N}$.**

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors :

$$(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X) \iff (\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k]))$$

Attention !

C'est là où F_X est continue, pas F_{X_n} .

73. (Chapitre 14) Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de l'intervalle $]0; 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$; alors : la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

74. (Chapitre 14) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur cet espace.

Si X admet une variance, alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

75. (Chapitre 14) Loi faible des grands nombres.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, admettant toutes la même espérance m et la même variance σ^2 (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

76. (Chapitre 14) Théorème central limite.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant la même espérance m et la même variance σ^2 non nulle.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k ; \quad \overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}$$

Dans ce cas, la suite $(\overline{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([\overline{X}_n^* \leq x]) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ou encore :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left(a < b \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([a \leq \overline{X}_n^* \leq b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

À retenir...

On centre et on réduit la moyenne empirique.

ALGÈBRE LINÉAIRE

GÉNÉRALITÉS

77. Définition d'une matrice inversible.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Petite remarque

Une propriété énonce que A est inversible si, et seulement si, il existe B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$: une seule des deux égalités suffit.

78. (Chapitre 1) Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel réel.

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- ✓ $F \subset E$,
- ✓ F est non vide,
- ✓ $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in F$ (F est stable par combinaison linéaire).

Petite remarque

Si E est de dimension finie et que F est un ssev de E , alors F est également de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.

79. (Chapitre 1) Famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

- **Définition.** On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E lorsque

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

- **Propriété.** Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.

Autrement dit :

Une famille est génératrice de E lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

80. (Chapitre 1) Famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

- **Définition.** On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre dans E lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \implies (\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = 0) \right)$$

- **Propriété.** Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.

Important !

Il est équivalent de dire qu'une famille est libre lorsque

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k \implies \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k$$

La liberté d'une famille assure donc que si un vecteur est CL des vecteurs de cette famille, alors cette CL est unique.

81. (Chapitre 1) Base d'un espace vectoriel de dimension finie. Que peut-on dire de son cardinal ?

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .

- **Définition.** On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E lorsque

$$\forall u \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

- **Caractérisation.** La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, elle est libre et génératrice de E .
- **Propriété.** Si $\mathcal{F}$ est une base de E , alors $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

Autrement dit :

Une famille est une base de E lorsque tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

82. (Chapitre 4) Noyau, image et rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

• **Noyau.**

* **Définition.** Le noyau de f , noté $\ker(f)$, est l'ensemble défini par

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

* **Propriétés.**

- × $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- × f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.

• **Image.**

* **Définition.** L'image de f , notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble défini par

$$\text{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F \mid \exists u \in E \mid v = f(u)\}$$

* **Propriétés.**

- × $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- × f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

• **Rang.**

* **Définition.** Le rang f , noté $\text{rg}(f)$, est la dimension de $\text{Im}(f)$ (licite car F est de dimension finie, donc $\text{Im}(f)$ également).

* **Propriétés.**

- × $0 \leq \text{rg}(f) \leq \min(\dim(E); \dim(F))$.
- × $\text{rg}(f) = 0$ si, et seulement si, f est l'application linéaire nulle.
- × f est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

✗ **Attention !**

◀ $\ker(f) = \{0_E\}$ se lit "le noyau de f est réduit au vecteur nul".

Pas très original

◀ $\text{Im}(f)$ n'est rien d'autre que l'ensemble de toutes les images des vecteurs de E par f ...

Petite remarque

◀ J'ai choisi de ne pas me contenter de donner les définitions... A voir ce que le jury veut !

83. (Chapitre 4) Isomorphisme d'espaces vectoriels. Caractérisation d'espaces vectoriels isomorphes.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

- **Définition.** Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F .
- **Définition.** On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F .
- **Caractérisation.** E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

84. (Chapitre 4) Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- **Théorème du rang.** On a : $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$.
- **Caractérisation des isomorphismes.** Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) = \{0_E\} & \longleftrightarrow & \text{rg}(f) = n \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & f \text{ bijective} & \end{array}$$

✉ **Pour info...**

◀ Il suffit que E soit de dimension finie (non nécessairement F) pour que le théorème du rang soit valable.

Petite remarque

◀ C'est en particulier valable si $E = F$, donc dans le cas où f est un endomorphisme... Un endomorphisme est un isomorphisme ssi il est injectif ssi il est bijectif.

85. (Chapitre 7) Rang d'une matrice. Discuter, selon les valeurs des réels a, b, c, d du rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- **Définition.** Soient $n, p \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le rang de A , noté $\text{rg}(A)$, est la dimension de $\text{Im}(A)$. Autrement dit, c'est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de A . En notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A , on a $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p))$.
- Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

* Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et donc $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 2$.

* Si $ad - bc = 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible et donc $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \leq 1$.

× Si $a = b = c = d = 0$, alors $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0$.

$$\times \text{ Sinon : } \operatorname{rg} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = 1.$$

86. (Chapitres 7 et 11) Matrices semblables : définition et propriétés.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ ainsi que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Définition.** On dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- **Propriétés.**
 - * **Caractérisation.** Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
 - * Si A et B sont semblables, alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$.
 - * Si A et B sont semblables, alors $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$.

RÉDUCTION

87. (Chapitre 11) Définition d'une matrice diagonalisable.

Une matrice carrée est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

88. (Chapitre 11) Définitions de valeur propre et vecteur propre d'une matrice carrée.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est valeur propre de A lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{ET} \quad AX = \lambda X$$

Un tel vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

89. (Chapitre 11) Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Définition.** Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.
On dit que P est annulateur de A lorsque $P(A) = 0_n$.
- **Propriété.** Si P est annulateur de A , alors $\operatorname{Sp}(A) \subset \operatorname{rac}(P)$, où $\operatorname{rac}(P)$ désigne l'ensemble des racines de P .
Autrement dit, si P est annulateur de A , alors les valeurs propres de A sont parmi les racines de P .

✗ Attention !

On a seulement une inclusion !
Toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas nécessairement des valeurs propres de A ... Sinon, tout réel serait valeur propre de A .

GRAPHES ET CHÂÎNES DE MARKOV

90. Définition de la matrice d'adjacence d'un graphe.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n (non pondéré). Notons $s_1, s_2, \dots, s_n$ ses sommets.
On appelle matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ la matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

- $m_{i,j}$ est le nombre d'arêtes reliant s_i et s_j si $\mathcal{G}$ est non orienté ;
- $m_{i,j}$ est le nombre d'arcs de s_i vers s_j si $\mathcal{G}$ est orienté.

91. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit non orienté.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n (non pondéré) et M sa matrice d'adjacence.
Le graphe $\mathcal{G}$ est non orienté si, et seulement si, M est symétrique.

92. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit connexe.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n (non pondéré) et M sa matrice d'adjacence.
Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe si, et seulement si, les coefficients de la matrice $I_n + M + \dots + M^{n-1}$ sont tous strictement positifs.

Petite remarque

Pour un graphe orienté, il s'agit alors de la forte connexité (relier deux sommets par des successions d'arcs).

93. (Chapitre 17) Définition de la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène.

Soient $r \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $\llbracket 1; r \rrbracket$.
La matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_1 = j])$$

Autrement dit, le coefficient (i, j) de M est la probabilité de transition de i vers j .

En gros...

La matrice de transition est une matrice d'adjacence du graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov dans laquelle chaque coefficient n'est pas le nombre d'arcs allant de i vers j , mais le poids de l'arc.

94. (Chapitre 17) État stable d'une chaîne de Markov.

Soient $r \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur $\llbracket 1; r \rrbracket$ dont la matrice de transition est notée M .

Un état stable (ou état invariant ou état stationnaire) de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une matrice ligne U telle que :

- ✓ U est stochastique,
- ✓ $U = U \times M$