

ÉNONCÉ

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de g en précisant ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions réelles, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n .
3. **Approximation de α_2 .** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$$

- 3.a. Établir : $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
- 3.b. Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_2 \leq u_n \leq -1$.
- 3.c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, démontrer que pour tous réels a, b tels que $a \leq b \leq -1$, on a :
$$0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a).$$
- 3.d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha_2 = e^{u_n} - e^{\alpha_2}$, puis $0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
- 3.e. Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α_2 .
- 3.f. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de α_2 à 10^{-5} près.
4. **Étude des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$.**
 - 4.a. Étudier les variations des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$ et déterminer leur limite en $+\infty$.
 - 4.b. Établir : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, -n \leq \alpha_n \leq -n + 1$. En déduire un équivalent de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.
 - 4.c. Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Démontrer : $1 \leq g(\ln(n)) \leq n$. En déduire : $g(\ln(2n)) \geq n$.
 - 4.d. En déduire : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$ puis déterminer un équivalent simple de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de g en précisant ses limites en $\pm\infty$.

- La fonction g est la somme de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g'(x) = e^x - 1$$

Or :

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned} \quad \leftarrow \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{++}$$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
g	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les limites :

* En $-\infty$:

Par opérations, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

* En $+\infty$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x - x \\ &= e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

2. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions réelles, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n .

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

- Sur $]0; +\infty[$:

La fonction g est :

- ✓ continue sur $]0; +\infty[$ (car dérivable),
- ✓ strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, par théorème de bijection, la fonction g est bijective de $]0; +\infty[$ dans $g(]0; +\infty[) =]1; +\infty[$.

Or $n \geq 2$, donc $n \in g(]0; +\infty[)$.

Conclusion : l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$.

- Sur $] -\infty; 0[$:

On procède de la même façon.

Conclusion : l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution sur $] -\infty; 0[$.

- Puisque $g(0) = 1 \neq n$, l'équation $g(x) = n$ ne possède pas d'autre solution.

Conclusion : pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n .

3. Approximation de α_2 . On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$$

3.a. Établir : $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.

On a :

- $g(\alpha_2) = 2$, par définition de α_2 ,
- puis :

$$\begin{aligned} g(-2) &= e^{-2} + 2 \\ &\geq 2 \end{aligned} \quad \leftarrow e^{-2} \geq 0$$

✗ Attention !

La **stricte croissance** est indispensable : c'est ce qui permet de "remonter" l'équivalence ici (car c'est ce qui permet de "désappliquer" une fonction).

Important !

Les croissances comparées sont données sous forme de quotient (sauf pour $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$) : il est important de les faire apparaître comme tels à l'écrit.

Rappel...

La continuité de g garantit (TVI) que $g(]0; +\infty[)$ est un intervalle ; et la stricte croissance de g fournit alors que $g(]0; +\infty[) =]g(0); \lim_{+\infty} g[$.

✓ Rigueur !

En se plaçant sur les intervalles ouverts, on évite d'avoir à justifier la stricte positivité / négativité des solutions trouvées. En revanche, l'énoncé demande d'établir que l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions réelles. Nous en avons trouvé deux sur $\mathbb{R}^*$, il faut bien mentionner qu'il n'y en a pas d'autre en 0..

⇒ Réflexe !

Dans le cas des suites implicites, on cherche à comparer des antécédents... Pour cela, on compare leurs images !

- et :

$$\begin{aligned} g(-1) &= e^{-1} + 1 \\ &\leq 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} -1 \leq 0, \text{ donc } e^{-1} \leq 1$$

Remarque

Ici, on préfère utiliser un argument qui porte sur g ... En effet, il y a deux bijections réciproques en jeu : l'une étant la bijection réciproque de la restriction de g sur $] -\infty; 0]$, que l'on peut noter $g|_{]-\infty; 0]}$ et l'autre de la restriction de g sur $] 0; +\infty[$. En mentionnant toujours un argument sur la bijection, on évite ces considérations...

D'où :

$$g(-1) \leq g(\alpha_2) \leq g(-2)$$

D'où le résultat, par stricte décroissance de g sur $] -\infty; 0]$.

Conclusion : $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.

3.b. Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_2 \leq u_n \leq -1$.

- Puisque $g(\alpha_2) = 2$, on a :

$$e^{\alpha_2} - \alpha_2 = 2$$

Conclusion : $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.

- Procédons par récurrence...

* **Initialisation.** Pour $n = 0$:

On sait que $u_0 = -1$ et $\alpha_2 \leq -1$, d'où : $\alpha_2 \leq u_0 \leq -1$. L'initialisation est vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\alpha_2 \leq u_n \leq -1$ et montrons $\alpha_2 \leq u_{n+1} \leq -1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_2 \leq u_n \leq -1$$

Puis, par croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$ et en soustrayant 2 :

$$e^{\alpha_2} - 2 \leq e^{u_n} - 2 \leq e^{-1} - 2$$

Or :

× d'après le point précédent, $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$;

× $e^{u_n} - 2 = u_{n+1}$;

× $e^{-1} \leq 1$, donc $e^{-1} - 2 \leq -1$.

D'où, par transitivité :

$$\alpha_2 \leq u_{n+1} \leq -1$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_2 \leq u_n \leq -1$.

► Réflexe !

On pense à raisonner par récurrence quand on souhaite établir une égalité / un encadrement du terme général d'une suite récurrente.

3.c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, démontrer que pour tous réels a, b tels que $a \leq b \leq -1$, on a : $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$.

On sait que :

- ✓ la fonction exponentielle est dérivable sur $] -\infty; -1]$;
- ✓ pour tout $x \in] -\infty; -1]$:

$$\begin{aligned} |\exp'(x)| &= \exp(x) \\ &\leq e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} x \leq -1, \text{ donc, par croissance de } \exp \text{ sur } \mathbb{R} : e^x \leq e^{-1}$$

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in] -\infty; -1]^2, |e^x - e^y| \leq \frac{1}{e}|x - y|$$

Soient finalement a, b des réels tels que $a \leq b \leq -1$.

D'après ce qui précède avec $x = b$ et $y = a$, licite car $a, b \in] -\infty; -1]$, on a :

$$|e^b - e^a| \leq \frac{1}{e}|b - a|$$

Et comme $a \leq b$, on a :

- $b - a \geq 0$, donc $|b - a| = b - a$,
- par croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$: $e^b \geq e^a$, donc $e^b - e^a \geq 0$ et ainsi $|e^b - e^a| = e^b - e^a$.

D'où :

$$0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$$

Conclusion : pour tous réels a, b tels que $a \leq b \leq -1$, on a : $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$.

3.d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha_2 = e^{u_n} - e^{\alpha_2}$, puis $0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha_2 &= e^{u_n} - 2 - \alpha_2 \\ &= e^{u_n} - e^{\alpha_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ par définition, } 2 + \alpha_2 = e^{\alpha_2}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question précédente avec $b = u_n$ et $a = \alpha_2$, licite car d'après la question 3.b., on a $\alpha_2 \leq u_n \leq -1$:

$$0 \leq e^{u_n} - e^{\alpha_2} \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

Or $e^{u_n} - e^{\alpha_2} = u_{n+1} - \alpha_2$...

Conclusion : on a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

- Démontrons enfin, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

* **Initialisation.** Pour $n = 0$:

On a :

$$\times \quad u_0 = -1,$$

$$\times \quad -2 \leq \alpha_2 \leq -1, \text{ d'où : } 2 \geq -\alpha_2 \geq 1.$$

$$\text{Ainsi : } 1 \geq u_0 - \alpha_2 \geq 0.$$

$$\text{Or } \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1. \text{ D'où :}$$

$$0 \leq u_0 - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons $0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

D'où, puisque $\frac{1}{e} > 0$:

$$0 \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Or, d'après ce qui précède :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

Par transitivité, on a donc :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

L'hérédité est ainsi établie.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Remarque

Pour ce type de récurrence, c'est toujours l'initialisation qui demande 'le plus de travail'. L'hérédité est directe avec ce qui a déjà été établi...

3.e. Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α_2 .

On a ainsi :

$$\checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n,$$

$$\checkmark \quad \frac{1}{e} \in]-1; 1[, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0.$$

D'où, par théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha_2 = 0$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha_2; \text{ autrement dit, la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha_2.$$

3.f. Écrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de α_2 à 10^{-5} près.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Ainsi, dès que $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-5}$, la valeur de u_n sera proche de α_2 à 10^{-5} près... Proposons donc le programme suivant :

```
1 def approx_alpha_2():
2     n=0
3     u=-1
4     while (1/np.exp(1))**n>10**(-5):
5         n=n+1
6         u=np.exp(u)-2
7     return u
```

4. Étude des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$.

4.a. Étudier les variations des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$ et déterminer leur limite en $+\infty$.

- Notons g_1 la bijection réciproque de la restriction de la fonction g sur $] -\infty; 0]$. Puisque $g(\alpha_n) = n$ et que $\alpha_n \in] -\infty; 0]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = g_1(n)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $n \leq n+1$, par décroissance de g_1 (monotonie identique à g sur $] -\infty; 0]$ sur $]1; +\infty[$, on a :

$$g_1(n) \geq g_1(n+1)$$

Autrement dit :

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

- Ensuite :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = g_1(n)$$

$$\times \text{puisque } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \text{ on a } \lim_{y \rightarrow +\infty} g_1(y) = -\infty.$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = -\infty$.

- On procède de la même façon pour $(\beta_n)_{n \geq 2}$.

Conclusion : la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

4.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, -n \leq \alpha_n \leq -n+1$. En déduire un équivalent de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\times g(\alpha_n) = n;$$

$$\times g(-n) = e^{-n} + n, \text{ donc}$$

$$g(-n) \geq n$$

$$\times g(-n+1) = e^{-n+1} + n - 1, \text{ et } n \geq 2, \text{ donc } -n+1 \leq -1 \text{ et ainsi } e^{-n+1} \leq 1, \text{ d'où :}$$

$$g(-n+1) \leq n$$

D'où :

$$g(-n+1) \leq g(\alpha_n) \leq g(n)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de g sur $] -\infty; 0]$, licite car $-n, \alpha, -n+1 \in]0; +\infty[$:

$$-n+1 \geq \alpha_n \geq n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, -n \leq \alpha_n \leq -n+1$.

- D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-n \neq 0$ et ainsi :

$$1 \geq \frac{\alpha_n}{-n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

Remarque

Pour les variations, on pourrait se passer d'introduire g_1 en faisant ainsi :
on a

$$n \leq n+1$$

autrement dit $g(\alpha_n) \leq g(\alpha_{n+1})$.
D'où, par stricte décroissance de g sur $] -\infty; 0]$ et comme $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in] -\infty; 0]$, on a

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

En revanche, pour la limite, pas trop le choix pour faire les choses proprement que de procéder comme je l'ai fait.

* Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{-n} = 1$$

Conclusion : $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$.

4.c. Soit $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$. Démontrer : $1 \leq g(\ln(n)) \leq n$. En déduire : $g(\ln(2n)) \geq n$.

- On a :

$$\begin{aligned} g(\ln(n)) &= e^{\ln(n)} - \ln(n) \\ &= n - \ln(n) \end{aligned}$$

Or :

* $n \geq 1$, donc $\ln(n) \geq 0$;

* la fonction $\ln$ est concave, donc sa courbe représentative est partout au-dessous de toutes ses tangentes et en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1 dont l'équation réduite est $y = x - 1$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \ln(x) \leq x - 1$$

D'où :

$$\ln(n) \leq n - 1$$

Et ainsi :

$$n - \ln(n) \geq 1$$

Par transitivité, on a ainsi :

$$1 \leq n - \ln(n) \leq n$$

Conclusion : $1 \leq g(\ln(n)) \leq n$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} g(\ln(2n)) &= 2n - \ln(2n) \\ &= n - \ln(2) + n - \ln(n) \\ &= n - \ln(2) + g(\ln(n)) \\ &\geq n - \ln(2) + 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ point précédent} \end{array}$$

Or $2 \leq e$, donc $\ln(2) \leq 1$. D'où :

$$n - \ln(2) + 1 \geq n$$

Conclusion : par transitivité, $g(\ln(n)) \geq n$.

4.d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}$, $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$ puis déterminer un équivalent simple de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$. On a $g(\beta_n) = n$. D'où, d'après la question précédente :

$$g(\ln(n)) \leq g(\beta_n) \leq g(\ln(2n))$$

Et ainsi, par stricte croissance de g sur $]0; +\infty[$, licite car $\ln(n), \beta, \ln(2n) \in]0; +\infty[$:

$$\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}$, $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$.

- ✓ D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$, on a $\ln(n) \neq 0$ et ainsi : $1 \geq \frac{\beta_n}{\ln(n)} \geq 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}$.
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} = 1$.

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.