

ÉNONCÉ

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1.
 - 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}^{++}$.
 - 1.b. En déduire, lorsque $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 - 2.a. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$, $1 < u_n < e$.
 - 2.b. À l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$, l'exécution de **approx_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
 - 2.c. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 - 2.d. En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - 2.e. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.
 - 3.a. Justifier que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ diverge vers $+\infty$.
 - 3.b. Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$. Calculer $f_n(n \ln(n))$ puis montrer que $n \ln(n) < v_n$.
 - 3.c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.
 - 3.d. En déduire : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 - 3.e. Déterminer enfin un équivalent simple de $\ln(v_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

CORRIGÉ

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

1. 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}^{++}$.

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, comme somme de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x}$$

$$\frac{x-n}{x}$$

D'où :

x	0	n	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	+
f_n	$+\infty$	$n(1 - \ln(n))$	$+\infty$

 **Rédaction**

Inutile de justifier :

- les signes évidents (x^2 , e^x)
- les signes des fonctions affines
- les signes des fonctions polynômes de degré 2

Limites :

- Par opérations, puisque $n > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = +\infty$$

- Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, suffisamment proche de $+\infty$:

$$f_n(x) = x \left(1 - n \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

D'où, par croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

1.b. En déduire, lorsque $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$.

- Sur $]0; n[$:

La fonction f_n est :

- ✓ continue sur $]0; n[$ (car dérivable),
- ✓ strictement décroissante sur $]0; n[$.

Donc par théorème de bijection, f_n est bijective de $]0; n[$ dans $]n(1 - \ln(n)); +\infty[$.

Or $n \geq 3$, donc $n > e$ et ainsi, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$: $\ln(n) > 1$.

Par conséquent : $0 \in f_n(]0; n[)$.

Conclusion : l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0; n[$, notée u_n .

- Sur $]n; +\infty[$:

De même.

Conclusion : l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $]n; +\infty[$, notée v_n .

- En n :

Puisque $n \geq 3$, on a $\ln(n) > 1$ et donc $f_n(n) \neq 0$.

Conclusion : l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution en n .

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

2.a. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, $1 < u_n < e$.

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. On a :

$$f_n(1) = 1 \quad ; \quad f_n(u_n) = 0 \quad ; \quad f_n(e) = e - n$$

Or $n \geq 3 > e$, d'où :

$$f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$$

Ainsi, par stricte décroissance de f_n sur $]0; n[$ (licite car $1, u_n, e$ sont dans $]0; n[$) :

$$e > u_n > 1$$

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, 1 < u_n < e$.

 **Réflexe !**

On compare les images !

2.b. À l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'exécution de **approx_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.

```

1 def f(n, x):
2     return x - n * np.log(x)
3 def approx_u(n):
4     a = 1
5     b = np.exp(1)
6     while b - a > 10 ** (-3):
7         m = (a + b) / 2
8         if f(n, a) * f(n, m) < 0:
9             b = m
10        elif f(n, a) * f(n, m) > 0:
11            a = m
12        else:
13            return m
14    return (a + b) / 2

```

2.c. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante. Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$.

•

$$\begin{aligned}
 f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) \\
 &= (n+1) \ln(u_{n+1}) - n \ln(u_{n+1}) \quad \leftarrow \text{par définition, } f_{n+1}(u_{n+1}) = 0, \text{ donc } u_{n+1} = (n+1) \ln(u_{n+1}) \\
 &= \ln(u_{n+1})
 \end{aligned}$$

► **Réflexe !**
Quand on coïncide, on revient à la définition de u_{n+1} !

• D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 f_n(u_{n+1}) &= \ln(u_{n+1}) \\
 &> 0 \quad \leftarrow \text{question 2.a. : } u_{n+1} > 1
 \end{aligned}$$

► **Réflexe !**
On compare u_n et u_{n+1} en comparant leurs images par f_n ou f_{n+1} .

Or $f_n(u_n) = 0$. D'où :

$$f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de f_n sur $]0; n[$ (licite car $u_n, u_{n+1} \in]1; e[\subset]0; n[$) :

$$u_{n+1} < u_n$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

2.d. En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

- La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est alors :
 - ✓ décroissante (question précédente),
 - ✓ minorée par 1 (question 2.a.).

Remarque
On ne met en place le théorème de convergence monotone uniquement parce que l'énoncé précise 'en déduire'. Sinon, on pourrait s'occuper directement de l'encadrement.

Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers un réel $\ell \geq 1$.

- ✓ Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. On sait que $f_n(u_n) = 0$. D'où $u_n - n \ln(u_n) = 0$ et donc

$$\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$$

Par conséquent, d'après la question 2.a., on obtient :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, \quad \frac{1}{n} \leq \ln(u_n) \leq \frac{e}{n}$$

$$\checkmark \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n} = 0.$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$ et donc, par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2.e. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$,
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ (car $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$).

Conclusion : par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 u_n - 1 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(u_n) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{n} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 &\leftarrow \forall n \geq 3, \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \\
 &\leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1, \text{ donc } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Remarque

On en déduit :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.

3.a. Justifier que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ diverge vers $+\infty$.

- ✓ D'après la question 1.b. :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, v_n > n$$

- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3.b. Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$. Calculer $f_n(n \ln(n))$ puis montrer que $n \ln(n) < v_n$.

-

$$\begin{aligned}
 f_n(n \ln(n)) &= n \ln(n) - n \ln(n \ln(n)) \\
 &= n \ln(n) - n \ln(n) - n \ln(\ln(n)) \\
 &= -n \ln(\ln(n))
 \end{aligned}
 \quad
 \leftarrow n, \ln(n) > 0$$

- Par définition, on a

$$f_n(v_n) = 0$$

Or :

$$\begin{aligned}
 f_n(n \ln(n)) &= -n \ln(\ln(n)) \\
 &< 0
 \end{aligned}
 \quad
 \leftarrow n > e, \text{ donc } \ln(n) > 1, \text{ donc } \ln(\ln(n)) > 0$$

Ainsi :

$$f_n(n \ln(n)) < f_n(v_n)$$

D'où, par stricte croissance de f_n sur $]n; +\infty[$ (licite car v_n et $n \ln(n)$ sont dans $]n; +\infty[$, puisque $\ln(n) > 1$) :

$$n \ln(n) < v_n$$

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, n \ln(n) < v_n$.

3.c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 n > 2 \ln(n) &\iff n - 2 \ln(n) > 0 \\
 &\iff f_2(n) > 0
 \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1.a. :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f_2(x) \geq 2(1 - \ln(2))$$

Mais $\ln(2) < 1$ (car $2 < e$), donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f_2(x) > 0$$

Ainsi, puisque $n > 0$, on a

$$f_2(n) > 0$$

Conclusion : par équivalences, on a établi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$$

➡ Réflexe !

On compare les images !

3.d. En déduire : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. D'après la question 3.b., on a déjà $v_n > n \ln(n)$.

Ensuite :

$$\begin{aligned} f_n(2n \ln(n)) &= 2n \ln(n) - n \ln(2n \ln(n)) \\ &= 2n \ln(n) - n \ln(n) - n \ln(2 \ln(n)) \\ &= n \ln(n) - n \ln(2 \ln(n)) \\ &= n (\ln(n) - \ln(2 \ln(n))) \\ &> 0 \end{aligned}$$

↙ question précédente, et stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$

Par conséquent :

$$f_n(v_n) < f_n(2n \ln(n))$$

D'où, par stricte croissance de f_n sur $]n; +\infty[$ (licite car v_n et $2n \ln(n)$ sont dans $]n; +\infty[$, puisque $2 \ln(n) > 1 \dots$) :

$$v_n < 2n \ln(n)$$

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.

3.e. Déterminer enfin un équivalent simple de $\ln(v_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

✓ D'après la question précédente, et par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, \ln(n \ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n \ln(n))$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, \ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2 \ln(n))$$

D'où :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, 1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2) + \ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

✓ On sait que :

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$

✓ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

D'où, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(2) + \ln(\ln(n))}{\ln(n)} = 1$$

Dès lors, par théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.