Oral HEC 20.. E

Énoncé

1. Question de cours. Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
2. Soit $x \in [0;+\infty[$. Établir la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k+x}$. On notera $f(x)$ sa somme.
3. Calculer $f(0)$.
4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0;+\infty[$.
5. Établir : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x+1}$.
6. Déduire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
7. 7.a. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{4}{3}|x-y|$.
   7.b. En déduire que f est continue sur $[0;+\infty[$.

Corrigé

> **♥ L'avis du chef ! ♥**
> Excellent exercice : à travailler sans modération ! On adore.

1. Question de cours. Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
   QUESTION DE COURS 16

2. Soit $x \in [0;+\infty[$. Établir la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k+x}$. On notera $f(x)$ sa somme.

   ✓ Puisque $x \geqslant 0$, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{1}{2^k+x} \leqslant \frac{1}{2^k}$.

   ✓ Puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique convergente.

   Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k+x}$ est convergente.

3. Calculer $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

> **✍ Rédaction**
> C'est une bonne utilisation du symbole " $\Longrightarrow$ ". Sinon, on peut aussi écrire "Soient $x, y \in [0;+\infty[$. Supposons $x \leqslant y$. Donc ... Donc ..."

4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0;+\infty[$.
   Soient $x, y \in [0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ 2^k + x \leqslant 2^k + y \\ &\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^k+x} \geqslant \frac{1}{2^k+y} \\ &\Longrightarrow f(x) \geqslant f(y) \end{aligned}$$

décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

on somme pour $k \in \mathbb{N}$, licite car les deux séries en jeu sont convrgentes

> **Important !**
> On ne sait pas si la fonction f est dérivable ou non (le but de la dernière question de l'exercice est d'établir sa continuité). Pas le choix donc que de revenir à la définition...

Conclusion : la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Précisions...

On sait que la somme de deux fonctions dérivables est dérivable ; et que, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, la somme de n fonctions dérivables est encore dérivable.
En revanche, la somme d'une infinité de fonctions dérivables ne l'est pas nécessairement !
Prenons un exemple classique :
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto x^k \ln(x)$, définie sur $]0;1]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est dérivable sur $]0;1]$.
Ensuite :

- si $x = 1$:
  On a
  $$\forall k \in \mathbb{N},\ f_k(1) = 0$$
  Donc la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k(1)$ est convergente et
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(1) = 0$$
- si $x \in]0;1[$:
  La série $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ est convergente et :
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \frac{\ln(x)}{1-x}$$

La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ n'est même pas continue en 1, car $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = 1 \neq f(1)$.
Par conséquent, la somme d'une infinité de fonctions dérivables n'est pas nécessairement dérivable.

> **☞ Rappel...**
> $$\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$
> donc
> $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = 1$$

5. Établir : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$.

Soit $x \in [0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(2x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + 2x} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2(2^{k-1} + x)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1} + x} \qquad \swarrow\ i = k-1 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=-1}^{+\infty} \frac{1}{2^i + x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{-1}+x} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i + x} \\ &= \frac{1}{1+2x} + f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$.

6. Déduire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.

- La fonction f est :
  - ✓ décroissante sur $[0;+\infty[$
  - ✓ minorée (par 0) sur $[0;+\infty[$.

  Ainsi, par théorème de limite monotone, la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
- Ensuite, en passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on obtient :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell$$

D'où

$$\ell = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7. 7.a. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{3}|x-y|$.

Important !
On ne sait même pas encore que la fonction f est continue, impossible donc d'utiliser l'IAF !!

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + x} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + y}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k + y - 2^k - x}{(2^k + x)(2^k + y)}\right| \\ &\leqslant |x-y| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k + x)(2^k + y)} \end{aligned}$$

$\swarrow$ inégalité triangulaire, licite car $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(2^k+x)(2^k+y)}$ est convergente (par critère...)

Or :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(2^k + x)(2^k + y)} \leqslant \frac{1}{4^k}$$

D'où, en sommant pour $k \in \mathbb{N}$, licite car les deux séries en jeu sont convergentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k + x)(2^k + y)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{4}{3}$$

D'où, puisque $|x-y| \geqslant 0$:

$$|x-y| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k + x)(2^k + y)} \leqslant \frac{4}{3}|x-y|$$

Conclusion : $\forall x, y \in [0;+\infty[,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{3}|x-y|$.

7.b. En déduire que f est continue sur $[0;+\infty[$.

Soit $y \in [0;+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{4}{3}|x-y|$$

Or $\lim\limits_{x\to y} |x-y| = 0$.

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to y} |f(x)-f(y)| = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$$

La fonction f est donc continue en y, et ceci pour tout $y \in [0;+\infty[$.

Conclusion : la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.

☞ Rappel...

La fonction f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

♣ Méthode !

Il est également possible de revenir à la définition quantifiée de limite.