

ÉNONCÉ

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

PARTIE I : ÉTUDE DE LA FONCTION f .

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Établir : $b \in [3; 4]$.
4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de **approx_b(p)** : renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```
1 def f(x):  
2     return .....  
3 def approx_b(p):  
4     x1, x2 = 3, 4  
5     while .....:  
6         m = .....  
7         if f(m) == 2:  
8             .....  
9         elif f(m) < 2:  
10            .....  
11        else:  
12            .....  
13    return .....
```

PARTIE II : ÉTUDE D'UNE SUITE

On définit maintenant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$.
6. Déterminer alors la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. **7.a.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$.
7.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$.
7.c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6., puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

PARTIE III : ÉTUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

8. Montrer que φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de φ sur $]0; +\infty[$.
10. Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \varphi(x) \leq x$.
11. **11.a.** Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.
11.b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.
12. **12.a.** Démontrer que pour tout $t \in [4; +\infty[: \frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t - \sqrt{t}}$.
12.b. Considérons la fonction $h : t \mapsto 2 \ln(\sqrt{t} - 1)$ définie sur $[4; +\infty[$. Dériver h .
12.c. En déduire que pour tout $x \in [4; +\infty[: \ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2 \ln\left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1}\right)$.

- 12.d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
13. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

CORRIGÉ

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

PARTIE I : ÉTUDE DE LA FONCTION f .

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- Par opération :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

- Pour tout x suffisamment proche de $+\infty$:

$$f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

D'où, par opération :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- f est une somme de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}^{++}$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

- On obtient ainsi :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.

- Sur $]0; 1[$:

- ✓ f est continue sur $]0; 1[$ (car dérivable)
- ✓ f est strictement décroissante sur $]0; 1[$

Par théorème de bijection, f est bijective de $]0; 1[$ dans $f(]0; 1[) =]1; +\infty[$.

Or $2 \in]1; +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]0; 1[$, notée a .

- Sur $]1; +\infty[$:

De même, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]1; +\infty[$, notée b .

- En 1 :

$f(1) = 1 \neq 2$, donc 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 2$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, notées a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Établir : $b \in [3; 4]$.

- $f(3) = 3 - \ln(3)$. Or $3 \geq e$, donc, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$: $\ln(3) \geq 1$. D'où : $3 - \ln(3) \leq 2$. Ainsi :

$$f(3) \leq 2$$

- $f(4) = 4 - \ln(4) = 2(2 - \ln(2))$. Or $2 \leq e$, donc $\ln(2) \leq 1$. D'où : $2 - \ln(2) \geq 1$, et ainsi :

$$f(4) \geq 2$$

Puisque $f(b) = 2$, on obtient :

$$f(3) \leq f(b) \leq f(4)$$

Et f étant strictement croissante sur $[3; 4]$:

$$3 \leq b \leq 4$$

Conclusion : $b \in [3; 4]$.

♥ L'avis du chef ! ♥

Très bon exercice d'analyse, assez complet. J'ai légèrement modifié la fin de la partie III pour aller un peu plus loin que l'énoncé initial et j'ai supprimé la partie IV sur les fonctions de deux variables.

✓ Rigueur !

Attention aux bijections réciproques de f ici... Il y en a 2 : une sur $]0; 1[$ et une autre sur $]1; +\infty[$. On préfère donc l'argument de stricte croissance portant sur f sur l'intervalle $[3; 4]$ plutôt que sur la bijection réciproque de la restriction de f à $[1; +\infty[$.

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `approx_b(p)` : renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```

1 def f(x):
2     return .....
3 def approx_b(p):
4     x1,x2=3,4
5     while .....:
6         m=.....
7         if f(m)==2:
8             .....
9         elif f(m)<2:
10            .....
11        else:
12            .....
13    return .....
```

Le voici, complet :

```

1 def f(x):
2     return x-np.log(x)
3 def approx_b(p):
4     x1,x2=3,4
5     while x2-x1>p:
6         m=(x1+x2)/2
7         if f(m)==2:
8             x1,x2=m,m
9         elif f(m)<2:
10            x1=m
11        else:
12            x2=m
13    return (x1+x2)/2
```

Rédaction

À l'écrit, il suffit d'écrire les lignes manquantes : inutile de réécrire tout le programme.

Important !

A savoir compléter correctement sans hésiter !

PARTIE II : ÉTUDE D'UNE SUITE

On définit maintenant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
 u_0 existe et $u_0 = 4 \geq b$ d'après la question 3. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons " u_n existe et $u_n \geq b$ ", et montrons " u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq b$ ".
 - * Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq b$. Or, d'après la question 3., $b \geq 3$.
Par conséquent $u_n > 0$ et ainsi, $\ln(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
 - * De plus, par hypothèse de récurrence :

$$u_n \geq b$$

D'où, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$ ($b > 0$) :

$$\ln(u_n) \geq \ln(b)$$

Et ainsi :

$$u_{n+1} \geq \ln(b) + 2$$

Or on sait que $f(b) = 2$, donc :

$$b - \ln(b) = 2$$

D'où :

$$\ln(b) + 2 = b$$

On obtient finalement :

$$u_{n+1} \geq b$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$.

6. Déterminer alors la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Or on sait que $u_n \geq b$ et que f est croissante sur $[b; +\infty[$. D'où :

$$f(u_n) \geq f(b) = 2$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Conclusion : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par b). Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq b$.
- On a ensuite :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2,$
- ✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell,$
- ✓ $x \mapsto \ln(x) + 2$ est continue en ℓ , car $\ell > 0$.

D'où :

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

Or :

$$\begin{aligned} \ell = \ln(\ell) + 2 &\iff \ell - \ln(\ell) = 2 \\ &\iff f(\ell) = 2 \\ &\iff \ell = b \end{aligned}$$

↪ $\ell > 1$ et b est l'unique solution de $f(x) = 2$ sur $]1; +\infty[$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b .

7. 7.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$.

- Posons $g : x \mapsto \ln(x) + 2$, définie sur $[b; +\infty[$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$. D'après ce qui précède, on a également $g(b) = b$.
- La fonction g est dérivable sur $[b; +\infty[$ et : $\forall x \in [b; +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x}$.
D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$\forall x \in [b; +\infty[, 0 < g'(x) \leq \frac{1}{b}$$

Et comme $b \geq 3$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$: $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$.

Ainsi, par transitivité :

$$\forall x \in [b; +\infty[, -\frac{1}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\forall x \in [b; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

- On a :

- ✓ g est dérivable sur $[b; +\infty[$
- ✓ $\forall x \in [b; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$\forall (x, y) \in [b; +\infty[^2, |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = u_n$ et $y = b$, licite car $u_n \geq b$ (question 3.), on obtient :

$$|g(u_n) - g(b)| \leq \frac{1}{3}|u_n - b|$$

Or, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(b) = b$, d'où :

$$|u_{n+1} - b| \leq \frac{1}{3}|u_n - b|$$

Et comme on a vu que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par b , on a : $u_{n+1} - b \geq 0$ et $u_n - b \geq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$.

Remarque

On a même $\ell \in [2; 4]$, car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

Rappel...

SI :
 • $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$
 • (u_n) converge vers ℓ
 • g est continue en ℓ
 ALORS : $g(\ell) = \ell$.

➡ Réflexe !

Ça empeste l'IAF !! Pour cela, définir la fonction g de sorte que $u_{n+1} = g(u_n)$ et établir :
 $\forall x \geq b, |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$...

Remarque

On pourrait également tout faire sur l'intervalle $[3; 4]$, puisque l'on sait que (b_n) est minorée par 3 et, comme elle est décroissante, elle est majorée par son premier terme, égal à 4.

Rappel...

$\forall X \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+, |X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$.

7.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$.

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
On sait que $u_0 = 4$ et $b \in [3; 4]$, donc :

$$0 \leq u_0 - b \leq 1 = \frac{1}{3^0}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$ et montrons $0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3^{n+1}}$.
Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$$

D'où, en multipliant par $\frac{1}{3}$ (positif) :

$$0 \leq \frac{1}{3}(u_n - b) \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

Or, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$$

D'où, par transitivité :

$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$.

7.c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6., puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, on retrouve : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$.

- Pour cela, il suffit de déterminer un entier n_0 tel que $\frac{1}{3^{n_0}} \leq 10^{-3}$.
Or : $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$. On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3^n} \leq 10^{-3}$$

D'où, en utilisant le résultat de la question précédente et par transitivité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq 10^{-3}$$

Conclusion : à partir du terme d'indice 7, u_n est une valeur approchée de b à 10^{-3} près.

★ Subtil... ★

La question 7.b. fournit une majoration de l'écart entre u_n et b . Par conséquent, il est tout à fait possible que u_n soit une valeur approchée de b à 10^{-3} près avant le terme d'indice 7...

PARTIE III : ÉTUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

8. Montrer que φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$. Puisque f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{++}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$.

De plus, puisque $x \in \mathbb{R}^{++}$, on a $[x; 2x] \subset \mathbb{R}^{++}$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur le segment $[x; 2x]$.
Par conséquent : $\varphi(x)$ existe.

Conclusion : φ est définie sur $\mathbb{R}^{++}$.

♣ Méthode !

Pour montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}^{++}$, on doit montrer : pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, $\varphi(x)$ existe.

Ensuite, pour montrer que $\int_x^{2x} \frac{1}{f} dt$ existe, on justifie que l'intégrande est continue sur le segment d'intégration.

- Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$, elle admet des primitives de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$. Notons F l'une d'elles.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \varphi(x) = F(2x) - F(x)$$

- Or :
 - ✓ les fonctions $x \mapsto 2x$ et id sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^{++}$,
 - ✓ la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$.

D'où, par composition et somme, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{++}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$.

9. En déduire les variations de φ sur $]0; +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \ln(2) - \ln(x) \geq 0 &\iff \ln(x) \leq \ln(2) \\ &\iff x \leq 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \text{ stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}^{++}$$

- On sait, d'après la question 1., que pour tout $t \in \mathbb{R}^{++}$, $f(t) \geq 1$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{++}$, $t > \ln(t)$.
Par conséquent, puisque $x \in \mathbb{R}^{++}$ et $2x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$x - \ln(x) > 0 \quad ; \quad 2x - \ln(2x) > 0$$

On en déduit :

x	0	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
φ		↗ 2 ↘	

10. Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \varphi(x) \leq x$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$.

On a :

$$\forall t \in [x; 2x], f(t) \geq 1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1; +\infty[$:

$$\forall t \in [x; 2x], \frac{1}{f(t)} \leq 1$$

Et comme f est positive sur $\mathbb{R}^{++}$, on a même :

$$\forall t \in [x; 2x], 0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $2x \geq x$ (puisque $x > 0$) et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[x; 2x]$:

$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} 1 dt$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[, 0 \leq \varphi(x) \leq x$.

Rappel...

Si :
 ✓ h est $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans J ;
 ✓ g est $\mathcal{C}^1$ sur J ,
 alors $g \circ h$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $(g \circ h)' = h' \times g' \circ h$.

➡ Réflexe !

On veut encadrer une intégrale :
on encadre l'intégrande !!

11.11.a. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

$$\checkmark \forall x \in \mathbb{R}^{++}, 0 \leq \varphi(x) \leq x$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$$

Conclusion : φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

→ Réflexe !

Cela revient à montrer que $\lim_0 \varphi$ existe et est un réel.
A-t-on une expression explicite de $\varphi(x)$? NON, alors a-t-on autre chose? Genre, un encadrement de $\varphi(x)$...

11.b. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(x) \ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right) \left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right) \left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \end{aligned}$$

On conclut par opérations...

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0$.

✗ Attention !

La limite est en 0... et il y a une FI, due aux $\ln(\dots)$. D'où la factorisation choisie ! On factorise par ce qui domine.

✗ Attention !

Pas de CC !!

12.12.a. Démontrer que pour tout $t \in [4; +\infty[$: $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t - \sqrt{t}}$.

- Soit $t \in [4; +\infty[$. Puisque $\ln(t) \geq 0$, on a $t - \ln(t) \geq t$, c'est à dire $f(t) \geq t$. Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$, on obtient :

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)}$$

- Pour tout $t \in [4; +\infty[$, on a :

$$f(t) \geq t - \sqrt{t} \iff \ln(t) \leq \sqrt{t}$$

Posons alors $g : t \mapsto \ln(t) - \sqrt{t}$.

* La fonction g est dérivable sur $[4; +\infty[$ et, pour tout $t \in [4; +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{t}}{2t\sqrt{t}} \end{aligned}$$

D'où :

t	4	$+\infty$
$g'(t)$	0	-
g	$\ln(4) - 2$	$-\infty$

* Or $2 < e$, donc $4 < e^2$, et ainsi $-2 + \ln(4) < 0$.

D'où :

$$\forall t \in [4; +\infty[, g(t) \leq 0$$

Autrement dit :

$$\forall t \in [4; +\infty[, \ln(t) \leq \sqrt{t}$$

Par conséquent :

$$\forall t \in [4; +\infty[, f(t) \geq t - \sqrt{t}$$

Or, on sait que : $\forall t > 1, t - \sqrt{t} > 0$. D'où :

$$\forall t \in [4; +\infty[, f(t) \geq t - \sqrt{t} > 0$$

Et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$\forall t \in [4; +\infty[, \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t - \sqrt{t}}$$

Conclusion : pour tout $t \in [4; +\infty[$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t - \sqrt{t}}$.

12.b. Considérons la fonction $h : t \mapsto 2 \ln(\sqrt{t} - 1)$ définie sur $[4; +\infty[$. Dériver h .

La fonction h est dérivable sur $[4; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats et, pour tout $t \in [4; +\infty[$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t} - 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t} - 1} \\ &= \frac{1}{t - \sqrt{t}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall t \in [4; +\infty[, h'(t) = \frac{1}{t - \sqrt{t}}$.

Rédaction

On a déjà justifié proprement des dérivabilité de fonctions composées dans les questions précédentes, on peut donc aller plus vite sur la fin de l'exercice.

12.c. En déduire que pour tout $x \in [4; +\infty[: \ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

Soit $x \in [4; +\infty[$. Puisque $[x; 2x] \subset [4; +\infty[$, on a, d'après la question 12.a. :

$$\forall t \in [x; 2x], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t - \sqrt{t}}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $2x \geq x$ (car $x > 0$) et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t - \sqrt{t}} dt$$

Or :

•

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt &= [\ln(|t|)]_x^{2x} \\ &= \ln(2x) - \ln(x) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

• D'après la question 12.b. :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t - \sqrt{t}} dt &= [h(t)]_x^{2x} \\ &= h(2x) - h(x) \\ &= 2(\ln(\sqrt{2x} - 1) - \ln(\sqrt{x} - 1)) \\ &= 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x \geq 4$, $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right)$.

12.d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) &= 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) \\ &= 2 \ln \left(\sqrt{2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

D'où, par opérations et composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\sqrt{2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2x}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 2 \ln(\sqrt{2})$$

Or $2 \ln(\sqrt{2}) = \ln(2)$... On a ainsi :

✓ d'après la question précédente : pour tout $x \geq 4$, $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1} \right)$;

✓ d'après ce qui précède : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1} \right) = \ln(2)$.

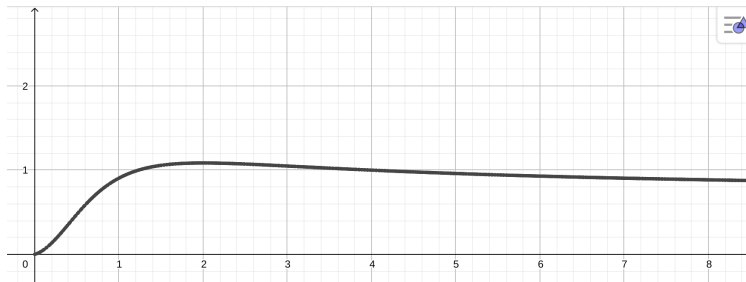
Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln(2)$.

13. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.

Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

Récapitulons quelques informations à faire apparaître :

- φ est strictement croissante sur $]0; 2]$, strictement décroissante sur $[2; +\infty[$
- $\varphi'(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une demi-tangente horizontale au point de coordonnées $(0, 0)$ (car $\varphi(0) = 0$)
- $\varphi'(2) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(2, \varphi(2))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln(2)$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$



Remarque

Impossible de primitiver $\frac{1}{f}$ avec des fonctions usuelles. Dans ce cas, la seule façon de calculer des valeurs de $\varphi(x)$ est d'obtenir une valeur approchée de $\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ par une méthode d'approximation d'intégrale... Typiquement la méthode des rectangles ou des trapèzes.