

ÉNONCÉ

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Question de cours. Convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.

2. 2.a. Justifier la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

2.b. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression $\sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2}$.

En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

3. 3.a. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \quad ; \quad \text{avec } |R_p(x)| \leq \frac{1}{p+2}$$

4. 4.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$.

4.b. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leq \frac{C}{n}$$

4.c. En déduire un équivalent de $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

Déduire de la question précédente :

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

CORRIGÉ

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Question de cours. Convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.

QUESTION DE COURS 14.

2. 2.a. Justifier la convergence de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

Conclusion : cette série est absolument convergente (série de Riemann), donc convergente.

2.b. Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression $\sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2}$.

En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} - \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} &= \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1} - 1}{p^2} \\ &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1} - 1}{p^2} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{p+1} - 1}{p^2} \quad \leftarrow \text{si } p \text{ est impair, } (-1)^{p+1} - 1 = 0 \\ &= \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{-2}{p^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-2}{(2k)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

• En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ (licite car toutes les séries en jeu sont convergentes), on obtient :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Conclusion : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. 3.a. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$

Soient $x \in [0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $t \in [0; x]$, puisque $-t \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p (-t)^k &= \frac{1 - (-t)^{p+1}}{1 - (-t)} \\ &= \frac{1}{1+t} - (-1)^{p+1} \frac{t^{p+1}}{1+t} \end{aligned}$$

D'où, en intégrant de 0 à x , on obtient :

• d'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{k=0}^p (-t)^k dt &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \int_0^x t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

♥ L'avis du chef ! ♥

Exercice assez calculatoire mais regroupant bon nombre de méthodes classiques. Il ne fallait pas se laisser impressionner par la longueur du sujet... Certaines questions sont plutôt abordables, le jury est là pour accompagner sur les questions plus compliquées (si le temps le permet)...

Remarque

On s'inspire de QUESTION CLASSIQUE 8 sur la série logarithmique...

- d'autre part, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^{p+1} \frac{t^{p+1}}{1+t} \right) dt &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt - (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt \\ &= \ln(1+x) - (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$

Conclusion : $\forall x \in [0; 1], \forall p \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t} dt.$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \quad ; \quad \text{avec } |R_p(x)| \leq \frac{1}{p+2}$$

Soient $x \in [0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On applique le résultat précédent avec x^n , licite car $x^n \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x^n) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{(x^n)^{k+1}}{k+1} + (-1)^{p+1} \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$$

Par changement d'indice $i = k + 1$ dans la somme, on obtient la somme voulue.

Ensuite, notons $R_p(x) = (-1)^{p+1} \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt$. Montrons : $|R_p(x)| \leq \frac{1}{p+2}$...

- On a :

$$\begin{aligned}|R_p(x)| &= \left| (-1)^{p+1} \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt \right| \\ &= \int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt\end{aligned}$$

↪ intégrande positive, bornes dans l'ordre croissant, donc $\int_0^{x^n} \frac{t^{p+1}}{1+t} dt \geq 0$

- Soit $t \in [0; x^n]$. On a ainsi

$$1+t \geq 1$$

Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$\frac{1}{1+t} \leq 1$$

Et comme $t^{p+1} \geq 0$:

$$\frac{t^{p+1}}{1+t} \leq t^{p+1}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $x^n \geq 0$:

$$|R_p(x)| \leq \int_0^{x^n} t^{p+1} dt$$

- Or :

$$\begin{aligned}\int_0^{x^n} t^{p+1} dt &= \frac{(x^n)^{p+2}}{p+2} \\ &\leq \frac{1}{p+2}\end{aligned}$$

↪ $x^n \leq 1$ et $p+2 > 0$

Conclusion : d'où le résultat...

4. 4.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- En intégrant le résultat précédent sur $[0; 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{x^{nk}}{k} + R_p(x) \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{nk} dx + \int_0^1 R_p(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \frac{1}{nk+1} + \int_0^1 R_p(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} + \int_0^1 R_p(x) dx \end{aligned} \quad \leftarrow \text{linéarité de l'intégrale}$$

- Montrons maintenant que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_p(x) dx = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{-1}{p+2} \leq R_p(x) \leq \frac{1}{p+2}$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \geq 0$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{-1}{p+2} dx \leq \int_0^1 R_p(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{p+2} dx$$

On a ainsi démontré :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{p+2} \leq \int_0^1 R_p(x) dx \leq \frac{1}{p+2}$$

Par théorème d'encadrement, on obtient finalement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 R_p(x) dx \right) = 0$$

On avait :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx - \int_0^1 R_p(x) dx$$

et on vient d'établir $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 R_p(x) dx \right) = 0$.

On en déduit :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

4.b. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| \leq \frac{C}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} \left| n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}n}{k(nk+1)} - \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}kn - (-1)^{k+1}(nk+1)}{k^2(nk+1)} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{k^2(nk+1)} \right| \quad \leftarrow n > 0 \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \left(k + \frac{1}{n}\right)} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \left(k + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Rappel...

On peut toujours regrouper deux sommes (ou deux intégrales) par linéarité. En revanche, pour séparer, il faut s'assurer de la convergence de chacune des sommes (ou intégrales) obtenues après séparation !

Pourquoi ?

Par critère de comparaison par équivalence ou inégalité ça fonctionne très bien !

inégalité triangulaire, licite car

$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 \left(k + \frac{1}{n}\right)}$ convergente...

licite car $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$ est convergente (série de Riemann)

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

$$\leq \frac{C}{n}$$

↙ en posant $C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} > 0$

⚠ Attention !
C doit être indépendant de n...

4.c. En déduire un équivalent de $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après les questions précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| n \int_0^1 \ln(1+x^n)dx - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \frac{C}{n}$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| n \int_0^1 \ln(1+x^n)dx - \frac{\pi^2}{12} \right| = 0$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \right) = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi, puisque $\frac{\pi^2}{12} \neq 0$:

$$n \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12}$$

Remarque

Sinon, on divise par $\frac{\pi^2}{12}$ pour obtenir ensuite : $|v_n l_n - 1| \rightarrow 0$, et donc $v_n l_n \rightarrow 1$ et donc $l_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n} \dots$

Conclusion : $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

Déduire de la question précédente :

$$u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons : $\begin{cases} u : x \mapsto \ln(1+x^n) \\ v : x \mapsto x \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$: $\begin{cases} u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx &= [x \ln(1+x^n)]_0^1 - \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx \\ &= \ln(2) - n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \\ &= \ln(2) - n \int_0^1 \frac{x^n + 1 - 1}{1+x^n} dx \\ &= \ln(2) - n \left(1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \right) \\ &= \ln(2) - n + nu_n \end{aligned}$$

- D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

Mais $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$, donc :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \frac{\pi^2}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

Rappel...

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$$

Conclusion : d'où le résultat.