

ÉNONCÉ

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.
 - 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f .
 - 1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2.
 - 2.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout réel strictement positif a , l'appel de **EML_1(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.
 - 2.b. On admet que l'on a également défini une fonction **Python** tel que, pour tout réel strictement positif a , l'appel de **EML_2(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
Les appels **EML_1(10**6)** et **EML_2(10**(-6))** renvoient respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.
3. On définit maintenant la fonction g sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \in [0; +\infty[, g(x) = e^{-x} - x^2$.
 - 3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $] -\infty; 1]$.
 - 3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, que l'on notera α .
 - 3.c. Justifier : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
4.
 - 4.a. Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
 - 4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
 - 4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0; e^{-1}]$.
5. Pour $x \in]0; +\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 - 5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.
 - 5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
 - 5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.
 - 5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

CORRIGÉ

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f .

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, comme quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}^{++}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{++}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

D'où :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
f	$+\infty$	0

Les limites étant obtenues par opérations.

1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
 u_0 existe et $u_0 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que " u_n existe et $u_n > 0$ " et montrons que " u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$ ".
 - * Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
 - * Et, on a aussi : $u_{n+1} > 0$, comme quotient de deux réels strictement positifs.L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Autrement dit, chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. 2.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout réel strictement positif a , l'appel de **EML_1(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.

```
1 def EML_1(a):
2     u=1
3     n=0
4     while u<a:
5         u=np.exp(-u)/u
6         n=n+1
7     return n
```

2.b. On admet que l'on a également défini une fonction **Python** tel que, pour tout réel strictement positif a , l'appel de **EML_2(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.

Les appels **EML_1(10**6)** et **EML_2(10**(-6))** renvoient respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.

- On en déduit que $u_5 < 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$.
- L'écart entre u_5 et u_6 est considérable... la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait-elle divergente ?

3. On définit maintenant la fonction g sur $[0; +\infty[$ par : $\forall x \in [0; +\infty[, g(x) = e^{-x} - x^2$.

3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $] -\infty; 1]$.

La fonction g est :

- ✓ strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ comme somme de $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^2$ qui sont strictement décroissantes sur $[0; +\infty[$.
- ✓ continue sur $[0; +\infty[$, comme somme de telles fonctions.

Ainsi, par théorème de bijection, g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $g([0; +\infty[)$. Or, on a immédiatement $g(0) = 1$ et par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Conclusion : g est bijective de $[0; +\infty[$ dans $] -\infty; 1]$.

3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, que l'on notera α .
Commençons par remarquer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned} \quad \leftarrow x \neq 0$$

Or, puisque g est bijective de $[0; +\infty[$ dans $] -\infty; 1]$ et que $0 \in] -\infty; 1]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, notée α .
Mais, comme $g(0) \neq 0$, on a même $\alpha \in]0; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0; +\infty[$, que l'on notera α .

3.c. Justifier : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
On a

$$\begin{aligned} g(1) &= e^{-1} - 1 \\ &= \frac{1 - e}{e} \\ &< 0 \end{aligned} \quad \leftarrow e > 1$$

Et $g(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} - e^{-2}$. Or : $e^{-1} < 1 < 2$, d'où :

$$-e^{-1} > -2$$

Et, par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-e^{-1}} > e^{-2}$$

Ainsi :

$$g(e^{-1}) > 0$$

Par conséquent :

$$g(e^{-1}) > g(\alpha) > g(1)$$

Remarque

On peut également raisonner par équivalences en partant de $g(e^{-1}) > 0$ pour arriver à une "trivialité".

Conclusion : par stricte décroissance de g sur $[0; +\infty[$, on obtient $e^{-1} < \alpha < 1$.

4. 4.a. Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

On sait que $u_0 = 1$ et ainsi, $u_1 = e^{-1}$ puis : $u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$. Or : $e^{-1} < 1$, donc :

$$1 - e^{-1} > 0$$

Et, par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$e^{1-e^{-1}} > 1$$

Conclusion : $u_2 > u_0$.

4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démontrons, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < u_{2n+2}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$: fait dans la question précédente.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n} < u_{2n+2}$ et montrons que $u_{2n+2} < u_{2n+4}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{2n} < u_{2n+2}$$

Puis, en appliquant f , strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, licite car $u_n > 0$ et $u_{2n} > 0$ (question 1.b.) :

$$f(u_{2n}) > f(u_{2n+2})$$

Autrement dit :

$$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$

Puis, en appliquant à nouveau f , toujours strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$, on obtient finalement :

$$u_{2n+2} < u_{2n+4}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < u_{2n+2}$.
Autrement dit : la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Pour info...

On peut aller un peu plus vite en appliquant directement $f \circ f$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^{++}$...
Au passage, puisque l'intervalle $]0; +\infty[$ est stable par f , la fonction $f \circ f$ est bien également définie sur $]0; +\infty[$.

4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0; e^{-1}]$.

✓ D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} < u_{2n+2}$$

D'où, en appliquant f , strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} > u_{2n+3}$$

Par conséquent, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

✓ D'après la question 1.b., la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 ; donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ également.

Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Et comme $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\ell \leq u_1$.

Conclusion : $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers un réel ℓ appartenant à $[0; e^{-1}]$.

5. Pour $x \in]0; +\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.

• Sur $]0; +\infty[$:

✓ La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$ sur cet intervalle,

✓ la fonction f est continue sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, par composition, la fonction h est continue sur $]0; +\infty[$.

• En 0 :

✓ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

✓ $\lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = 0$

D'où, par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(f(x)) = 0$. Autrement dit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = h(0)$$

La fonction h est donc continue en 0.

Conclusion : la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.

5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ f(x) \\ &= f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x} + x\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0; +\infty[, h(x) = x \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right)$.

5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

• Remarquons déjà que $h(0) = 0$, donc 0 est solution de cette équation.

• Soit ensuite $x \in]0; +\infty[$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff x \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) = x && \swarrow x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) = 1 \\ &\iff -\frac{g(x)}{x} = 0 && \swarrow x \neq 0 \\ &\iff g(x) = 0 && \swarrow x \neq 0 \text{ et travail fait en question 3.b.} \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $h(x) = x$ sur $[0; +\infty[$ sont 0 et α .

5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

- On sait que :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$
- ✓ d'après 4.c., la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0; e^{-1}]$;
- ✓ h est continue en ℓ (car continue sur $[0; +\infty[$ et que $\ell \in [0; +\infty[$)

D'où : $\ell = h(\ell)$.

D'après la question précédente, on a donc :

$$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \alpha$$

Mais on sait que $\ell \in [0; e^{-1}]$ et, d'après la question 3.c., $\alpha > e^{-1}$.

Par conséquent $\ell \neq \alpha$ et donc :

$$\ell = 0$$

Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- On a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$; donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{2n+1}) = +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+2} = +\infty$$

Conclusion : la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

D'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$$

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.

Rappel...

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$
 - (u_n) converge vers ℓ
 - h est continue en ℓ
- ALORS : $h(\ell) = \ell$.

Rappel...

La suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont toutes deux pour limite ℓ (où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).