

ÉNONCÉ

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
2. Calculer I_0 .
3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Que peut-on en déduire ?
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
8. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
9. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(nI_n - 1))$.
10. Donner alors les valeurs de a, b, c .

CORRIGÉ

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.
Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f_n est continue sur le segment $[0; 1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f_n(x) dx$ est bien définie.
- On a :

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) \geq 0$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$:

$$I_n \geq 0$$

✓ **Rigueur !**

On veut voir le mot 'segment'.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et $I_n \geq 0$.

2. Calculer I_0 .

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x) dx \\ &= \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 - e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

➡ **Réflexe !**

On vérifie la cohérence du signe...

3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x) dx - \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x) dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} (1-x-1) dx \\ &= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \end{aligned}$$

➡ **Réflexe !**

On factorise autant qu'on peut pour simplifier l'étude du signe de l'intégrande.

Or, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$-x \leq 0 ; (1-x)^n \geq 0 ; e^{-2x} > 0$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$ et que les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0; 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \leq 0$$

Autrement dit :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Conclusion : la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Que peut-on en déduire ?

D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- ✓ décroissante,
- ✓ minorée (par 0).

Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in [0; 1]$. On a :

$$0 \leq e^{-2x} \leq 1$$

D'où, puisque $(1-x)^n \geq 0$:

$$0 \leq e^{-2x}(1-x)^n \leq (1-x)^n$$

- On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0; 1], 0 \leq f_n(x) \leq (1-x)^n$$

Et par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$, on obtient :

$$I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^n dx &= \left[\frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

► **Réflexe !**

Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande...

Remarque

On peut également effectuer le changement de variable $t = 1-x$ pour se rendre compte que $\int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 t^n dt...$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

✓ d'après les questions 1. et 5. : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$.

Posons : $\begin{cases} u : x \mapsto (1-x)^{n+1} \\ v : x \mapsto \frac{-1}{2} e^{-2x} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$: $\begin{cases} u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases}$

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{-1}{2} (1-x)^{n+1} e^{-2x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \frac{-1}{2} e^{-2x} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

8. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$

Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$.

Et ainsi, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$.

9. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(l_n - 1))$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend ce qui a été obtenu dans la question précédente :

$$nl_n = 1 - 2l_{n+1} - l_n$$

Et donc :

$$nl_n - 1 = -2l_{n+1} - l_n$$

Ce qui donne :

$$n(nl_n - 1) = -2nl_{n+1} - nl_n$$

Or :

$$\begin{aligned} -2nl_{n+1} &= -2(n+1-1)l_{n+1} \\ &= -2(n+1)l_{n+1} + 2l_{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$n(nl_n - 1) = -2(n+1)l_{n+1} + 2l_{n+1} - nl_n$$

On passe ensuite à la limite, en utilisant le résultat de la question précédente !

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(nl_n - 1) = -3$.

✗ Attention !

$\lim_{N \rightarrow +\infty} Nl_N = 1$; mais *a priori*,
 $\lim_{N \rightarrow +\infty} Nl_{N+1} \neq \lim_{N \rightarrow +\infty} Nl_N$...
 Attention quand on compose des limites !
 Dans le même genre, on sait
 que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \neq 1$ (même si
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$)...

10. Donner alors les valeurs de a, b, c .

D'après la question précédente :

$$n(nl_n - 1) = -3 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

D'où :

$$nl_n - 1 = \frac{-3}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puis :

$$nl_n = 1 - \frac{3}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et ainsi :

$$l_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Conclusion : $a = 0, b = 1$ et $c = -3$.

► Réflexe !

$$u_n \rightarrow \ell \iff u_n = \ell + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

On rappelle aussi :

$$\begin{aligned} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \end{aligned}$$

📖 Pour info...

On dit que l'on a obtenu un développement asymptotique de l_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.