

ÉNONCÉ

Soient $a > 0$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^a}$.

1. Question de cours. Énoncer les critères de convergence sur les séries à termes positifs.

2. On supposera dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$.

2.a. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et calculer R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b. En déduire v_n puis donner une condition sur a pour que $\sum_{n \geq 0} v_n$ soit convergente.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de R_n , R_{n-1} et a .

4. On suppose $a = 1$.

4.a. Exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et $\ln(R_{n-1})$.

4.b. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

5. On suppose $a > 1$.

5.a. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$: $R_{n-1}^a \leq R_n$.

5.b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

6. On suppose $a \in]0; 1[$.

6.a. Calculer $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^a}$.

6.b. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

CORRIGÉ

♥ L'avis du chef ! ♥

Bon exercice autour du reste d'une série convergente. Très complet : manipulations d'inégalités, critères, équivalents, comparaison série/intégrale...

Soient $a > 0$ et $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^a}$.

1. Question de cours. Énoncer les critères de convergence sur les séries à termes positifs.

QUESTION DE COURS 16.

2. On supposera dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$.

2.a. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et calculer R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \frac{1}{2^n}$.

OU ALORS...

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+n+1} \quad \leftarrow i = k - (n+1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

2.b. En déduire v_n puis donner une condition sur a pour que $\sum_{n \geq 0} v_n$ soit convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n}{(R_{n-1})^a} \quad \leftarrow \text{question précédente} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^a} \\ &= \frac{1}{2^n} \times (2^a)^{n-1} \\ &= \frac{(2^a)^n}{2^n} \times \frac{1}{2^a} \\ &= \frac{1}{2^a} \left(\frac{2^a}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^a} (2^{a-1})^n \end{aligned}$$

- La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ a donc même nature que la série $\sum_{n \geq 1} (2^{a-1})^n$, qui est une série géométrique de raison $(2^{a-1})^n$. Par conséquent, elle converge si, et seulement si, $2^{a-1} \in]-1; 1[$.
Or, on a déjà $2^{a-1} > 0...$ et, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{++}$:

$$2^{a-1} < 1 \iff (a-1) \ln(2) < 0$$

$\leftarrow \ln(2) > 0$

$$\iff a < 1$$

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente si, et seulement si, $a < 1$.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de R_n , R_{n-1} et a .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n}{R_{n-1}^a} \\ &= \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^a} \end{aligned}$$

4. On suppose $a = 1$.

4.a. Exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et $\ln(R_{n-1})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, avec $a = 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1 - v_n) &= \ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right) \\ &= \ln(R_n) - \ln(R_{n-1}) \end{aligned} \quad \leftarrow R_n, R_{n-1} > 0, \text{ car } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est à termes strictement positifs}$$

✓ **Rigueur !**

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ seulement si a et b sont tous les deux strictement positifs !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(1 - v_n) = \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})$.

4.b. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$: alors la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ diverge grossièrement.

• Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:

✓ $\ln(1 - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -v_n$. D'où : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(1 - v_n)$.

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_{n-1} \geq 0$)

Donc, par critère de comparaison par équivalence sur les séries à termes généraux positifs, les séries

$\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} -\ln(1 - v_n)$ ont même nature.

Mais, d'après la question précédente, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N -\ln(1 - v_n) &= \sum_{n=1}^N \ln(R_{n-1}) - \ln(R_n) \\ &= \ln(R_0) - \ln(R_N) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{télescoping}$$

Or $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$, donc par composition $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(R_N) = -\infty$.

Conclusion : la série $\sum_{n \geq 1} -\ln(1 - v_n)$ est divergente, et donc la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ l'est également.

Conclusion : dans tous les cas, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est divergente.

★ **Subtil...** ★

On sait que si deux suites sont équivalentes, et que l'une est positive alors, à partir d'un certain rang, l'autre aussi. Par conséquent, pour appliquer le critère, il suffit de mentionner la positivité d'une des deux suites.

À retenir...

On a

$$\begin{aligned} R_N &= \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^N u_k \end{aligned}$$

d'où :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$$

5. On suppose $a > 1$.

5.a. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$: $R_{n-1}^a \leq R_{n-1}$.

Puisque la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0, il existe un rang N , que nous considérons ensuite, tel que :

$$\forall n \geq N, 0 \leq R_{n-1} \leq 1$$

Puis, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{a-1}$ sur $\mathbb{R}^+$ licite car $a - 1 > 0$, on a :

$$\forall n \geq N, 0 \leq R_{n-1}^{a-1} \leq 1$$

Et comme $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall n \geq N, 0 \leq R_{n-1}^a \leq R_{n-1}$$

Conclusion : il existe $N \in \mathbb{N}^*$, que nous considérons ensuite, tel que pour tout $n \geq N$: $R_{n-1}^a \leq R_{n-1}$.

Remarque

On peut procéder ainsi, mais si on veut détailler, on revient à la définition quantifiée de limite, puis on prend $\varepsilon = 1$.

5.b. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}; +\infty[$. D'après la question précédente, et puisque $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est), on a :

$$0 < R_{n-1}^a \leq R_{n-1}$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{++}$ et comme $u_n \geq 0$:

$$\frac{u_n}{R_{n-1}^a} \geq \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

On a ainsi :

$$\forall n \geq N, 0 \leq \frac{u_n}{R_{n-1}} \leq \frac{u_n}{R_{n-1}^a}$$

Autrement dit :

$$\forall n \geq N, 0 \leq \frac{u_n}{R_{n-1}} \leq v_n$$

- Or, d'après la question 4. (le cas $a = 1$ donne $v_n = \frac{u_n}{R_{n-1}}$), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{R_{n-1}}$ est divergente.

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est divergente.

6. On suppose $a \in]0; 1[$.

6.a. Calculer $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^a}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $a \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^a} &= \left[\frac{1}{1-a} t^{1-a} \right]_{R_n}^{R_{n-1}} \\ &= \frac{1}{1-a} (R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a}) \end{aligned}$$

✗ Attention !

Si on avait $a = 1$ on primitiverait autrement...

6.b. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} v_n$.

- ✓ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ sur $\mathbb{R}^{++}$, donc sur $[R_n; R_{n-1}]$, on a :

$$\forall t \in [R_n; R_{n-1}], \frac{1}{R_{n-1}^a} \leq \frac{1}{t^a}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $R_n < R_{n-1}$:

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{R_{n-1}^a} dt \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t^a}$$

D'où, d'après la question précédente :

$$\frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^a} \leq \frac{1}{1-a} (R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a})$$

On a ainsi, d'après la question 3. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{1-a} (R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a})$$

- ✓ Or, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et par télescopage :

$$\sum_{n=1}^N R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a} = R_0^{1-a} - R_N^{1-a}$$

Mais, on sait que $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0$ et que $1-a > 0$; d'où : $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N^{1-a} = R_0^{1-a}$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a})$ est convergente, et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1-a} (R_{n-1}^{1-a} - R_n^{1-a})$ aussi.

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

Pourquoi ?

$$R_n - R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = -u_n < 0.$$