

ÉNONCÉ

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant FACE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant PILE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.

Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i ". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k " et $F_k = \overline{P_k}$.

On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. Loi de X .

1.a. Donner $X(\Omega)$.

1.b. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

1.c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

5.a. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

5.b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

5.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

6.a. Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

6.b. Montrer que $\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{2}{3}$.

6.c. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

6.d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en **Python**, la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $]0; 1[$, et que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de $\llbracket a; b \rrbracket$.

7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant afin que la fonction `simulX` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

```
1 def simulX():
2     piece=rd.randint(...,...)
3     x=1
4     if piece==0:
5         lancer=rd.random()
6         while .....
7             .....
8             .....
9     else:
10        if piece==1:
11            .....
12    return(x)
```

7.b. Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numéro 2 ne soit pas pris en compte dans le programme ci-dessus.

CORRIGÉ

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant FACE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant PILE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.

Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i ". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k " et $F_k = \overline{P_k}$.

On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. Loi de X .

1.a. Donner $X(\Omega)$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

1.b. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X = 1]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X = 1]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X = 1]) \\ &= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X = 1]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X = 1]) \quad \leftarrow \forall i \in \{0; 1; 2\}, \mathbb{P}(A_i) \neq 0 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$.

1.c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X = n]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X = n]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X = n]) \\ &= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X = n]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X = n]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X = n])\end{aligned}$$

Or :

- la pièce 1 ne donne jamais PILE, donc $\mathbb{P}_{A_2}([X = n]) = 0$
- la pièce 2 donne PILE dès le premier lancer et $n \geq 2$, d'où $\mathbb{P}_{A_1}([X = n]) = 0$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = n]) &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_0}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_n) \quad \leftarrow \text{par indépendance des lancers une fois } A_0 \text{ réalisé} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

Puisque $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1 &\iff \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1 \\ &\iff \mathbb{P}([X = 0]) + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\end{aligned}$$

➡ Réflexe !

On pense à la FPT quand l'expérience est en deux temps et que l'on s'intéresse à ce qui se passe sur le second temps.

★ Subtil... ★

Les évènements $P_1, P_2, \dots$ sont indépendants pour $\mathbb{P}_{A_0}$; mais pas pour $\mathbb{P}$. Il suffirait pour cela de vérifier que $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$.

✗ Attention !

L'expression $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$!

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathbb{P}([X=0]) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}([X=0]) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}([X=0]) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2^2} \times 2 \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}([X=0]) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

← changement d'indice $i = n - 2$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} |n\mathbb{P}([X=n])|$ est convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente,

car $\forall n \in \mathbb{N}, n\mathbb{P}([X=n]) \geq 0$

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 2} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n=2}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, donc la série $\sum_{n \geq 2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 2} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= 0 \times \mathbb{P}([X=0]) + 1 \times \mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} - 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

⚠ Attention !
L'expression $\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$... Puis, de toute façon, pour étudier la nature d'une série, inutile de regarder les premiers termes...

⚠ Attention !
Ne pas oublier que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Conclusion : X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.

Interprétation : en moyenne, sur un grand nombre de répétitions de l'expérience, le joueur obtiendra son premier PILE au premier lancer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

- On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, ainsi, par théorème de transfert :

X^2 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} |n^2\mathbb{P}([X=n])|$ est convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente,

car $\forall n \in \mathbb{N}, n^2\mathbb{P}([X=n]) \geq 0$

si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 2} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^N n^2 \mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{3} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=2}^N (n(n-1) + n) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{12} \sum_{n=2}^N n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, donc les séries $\sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n \geq 2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 2} n^2 \mathbb{P}([X = n])$ est convergente.

- On en déduit que X^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X = n]) \\ &= 0 \times \mathbb{P}([X = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X = 1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X = n]) \\ &= \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \mathbb{P}([X = 1]) + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{12} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \mathbb{E}(X) \\ &= \frac{4}{3} + 1\end{aligned}$$

calcul de la question précédente

- D'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{4}{3} + 1 - 1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

Les rôles PILE et FACE sont symétriques ici (car équiprobabilité du choix de la pièce initiale, puis équiprobabilité sur la pièce 0). Donc il est équivalent de compter le rang du premier PILE ou le rang du premier FACE...

Conclusion : X et Y suivent la même loi.

5. 5.a. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

Soit $j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

Puisque $j \geq 2$, c'est la pièce 0 qui a été choisie... Ainsi :

$$[Y = j] = A_0 \cap P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap F_j$$

Or $[X = 1] = P_1$.

D'où :

$$\begin{aligned}[X = 1] \cap [Y = j] &= P_1 \cap (A_0 \cap P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap F_j) \\ &= A_0 \cap P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap F_j \\ &= [Y = j]\end{aligned}$$

Les événements étant égaux, leurs probabilités sont ainsi égales.

Conclusion : pour tout $j \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}(Y = j)$.

5.b. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

Raisonnement analogue.

5.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Puisque $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ et que X et Y suivent la même loi :

$$\mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

Mais : $[X = 1] \cap [Y = 1] = \emptyset$, car il est impossible d'avoir PILE et FACE au même lancer. D'où :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X = 1]) \times \mathbb{P}([Y = 1]) \neq \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

♣ Méthode !

Il n'est pas rare de procéder ainsi, en cherchant une intersection vide parmi les cas simples.

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

6.a. Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

Raisonnons par double inclusion.

- $\subset$
- * $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
 - * $[Z = 0] = [X = 0] \cap [Y = 0] = \emptyset$ (impossible de n'obtenir aucune PILE et aucun FACE)
 - * $[Z = 2] = ([X = 0] \cap [Y = 2]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1])$ et ces trois intersections sont vides (impossible de n'avoir aucun PILE et le premier FACE au second lancer... et impossible d'avoir le premier PILE et le premier FACE au premier lancer...).
- D'où $[Z = 2] = \emptyset$.

On a ainsi :

$$Z(\Omega) \subset \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$$

$\supset$ Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$. Montrons que $[Z = i] \neq \emptyset$.

- * Si $i = 1$: l'issue consistant à choisir la pièce 2 puis à n'obtenir que des PILE réalise l'évènement $[Z = 1]$, car cette pièce ne donnera jamais FACE.
D'où : $[Z = 1] \neq \emptyset$.
- * Si $i \geq 3$: l'issue consistant à choisir la pièce 0 puis à obtenir PILE des lancers 1 à $i - 1$ et FACE ensuite réalise l'évènement $[Z = i]$, car elle réalise l'évènement $[X = 1] \cap [Y = i - 1]$.
D'où : $[Z = i] \neq \emptyset$.

On a établi :

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}, [Z = i] \neq \emptyset$$

Par conséquent :

$$\mathbb{N} \setminus \{0; 2\} \subset Z(\Omega)$$

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.

Important !

On attend UNE issue. Il faut donc expliciter un déroulement précis de l'expérience complète.

6.b. Montrer que $\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{2}{3}$.

D'après la formule des probabilités totales avec $([X = 0], [X = 1])$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = 1]) &= \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 0]) \\ &= \mathbb{P}([X = 0]) \times \mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) + \mathbb{P}([Y = 0]) \times \mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]) \\ &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]) \end{aligned}$$

$\leftarrow \begin{cases} \mathbb{P}([X = 0]) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}([Y = 0]) \neq 0 \text{ (valent } \frac{1}{3}) \\ X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi et } \mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{3} \end{cases}$

Mais si $[X = 0]$ est réalisé, cela implique d'avoir FACE dès le premier lancer, et donc $[Y = 1]$ est réalisé. Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 1]) = 1$$

De même :

$$\mathbb{P}_{[Y=0]}([X = 1]) = 1$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{2}{3}$.

→ Réflexe !

On s'intéresse à la loi d'une somme de variables aléatoires discrètes : on utilise la FPT !

6.c. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Puisque (P_1, F_1) est un système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} [Z = n] &= (P_1 \cap [Z = n]) \cup (F_1 \cap [Z = n]) \\ &= ([X = 1] \cap [X + Y = n]) \cup ([X = 1] \cap [X + Y = n]) \\ &= ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1]) \end{aligned}$$

$\leftarrow P_1 = [X = 1] \text{ et } F_1 = [Y = 1]$

Remarque

On voit l'intérêt d'avoir travaillé la démonstration de la FPT pour avoir cette idée...

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, [Z = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$.

6.d. En déduire que :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = n]) &= \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = n - 1] \cup [Y = 1] \cap [X = n - 1]) \\ &= \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = n - 1]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = n - 1]) \\ &= \mathbb{P}([Y = n - 1]) + \mathbb{P}([X = n - 1]) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{incompatibilité de } [X = 1] \text{ et } [Y = 1], \text{ donc des deux évènements en jeu} \\ \text{questions 5.a., 5.b., licite car } n - 1 \geq 2 \\ X \text{ et } Y \text{ ont même loi, et question 1.c. car } n - 1 \geq 2 \end{array} \right\}$

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([Z = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$.

7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en **Python**, la commande **rd.random()** renvoie un réel aléatoire de $]0; 1[$, et que la commande **rd.randint(a,b)** renvoie un entier aléatoire de $\llbracket a; b \llbracket$.

7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant afin que la fonction **simulX** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

```

1 def simulX():
2     piece=rd.randint(...,...)
3     x=1
4     if piece==0:
5         lancer=rd.random()
6         while .....
7             .....
8             .....
9     else:
10         if piece==1:
11             .....
12     return(x)

```

Voici :

```

1 def simulX():
2     piece=rd.randint(0,3)
3     x=1
4     if piece==0:
5         lancer=rd.random()
6         while lancer < 1/2:
7             lancer=rd.random()
8             x=x+1
9     else:
10         if piece==1:
11             x=0
12     return(x)

```

Rappel...

Il suffit de recopier les lignes à compléter. Inutile de réécrire tout le programme.

7.b. Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numéro 2 ne soit pas pris en compte dans le programme ci-dessus. Si l'on joue avec la pièce 2, alors on obtient PILE dès le premier lancer et donc X prend la valeur 1. Or la variable x est initialisée à 1 dans le programme ci-dessus, ainsi, si on joue avec la pièce 2, sa valeur n'est pas changée dans les lignes 8 et 11, donc le programme renverra 1.