

ÉNONCÉ

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0_3$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base.

3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.

3.b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3.c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

4.b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

5.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

5.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

5.c. Notons $\mathcal{C}' = \{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid NQ = QN\}$. Démontrer que $\mathcal{C}' = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$ puis en déduire une base de $\mathcal{C}'$.

5.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 + I_3 = A\}$.

6.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

6.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

6.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

6.d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

6.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

CORRIGÉ

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0_3$.

$$\text{On a } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $(A - 2I_3)^3 = 0_3$.

2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff (A - 2I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel. De

surcroît, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de E_2 :

- ✓ génératrice de E_2 d'après ce qui précède,
- ✓ libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_2 .

3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 3.a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.

$$\begin{aligned} AV &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= U + 2V \end{aligned}$$

Conclusion : $AV \in \text{Vect}(U, V)$.

✓ Rigueur !

Pour davantage de rigueur, on peut quantifier ainsi :
 "Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe alors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$."
 Mais est-ce vraiment nécessaire... ?

📖 Rappel...

$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{a\vec{u} + b\vec{v} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$: c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3.b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AX = 2X + V &\iff (A - 2I_3)X = V \\ &\iff \begin{cases} -x - y &= 1 \\ &z = 0 \\ -x - y + z &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - y &= 1 \\ &z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y - 1 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -1 - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour info...

Si on avait défini la somme d'ensembles, on aurait pu écrire :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) : \text{c'est un espace affine de dimension 1, porté par l'espace vectoriel } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \dots$$

3.c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

✓ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\implies \begin{cases} -a + b - c = 0 \\ a &= 0 \\ &b = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (U, V, W) est libre.

✓ Aussi : $\text{Card}(U, V, W) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Conclusion : la famille (U, V, W) est une base.

Important !

Une base d'un EV de dimension finie E c'est une famille :

- ✓ génératrice de E ,
- ✓ libre dans E ,
- ✓ dont le cardinal est égal à la dimension de E .

En pratique, **seuls deux de ces trois points suffit pour montrer qu'une famille est une base.**

Si E est un EV de référence (on connaît donc sa dimension), on utilise souvent 'liberté + de bon cardinal'.

Si l'on ne connaît pas la dimension de E , alors on utilise 'générateur + libre'. Et bien souvent, on cherche alors à écrire E sous forme d'ev engendré par une certaine famille.

4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

Mettons en place la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

En permutant les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Reste à multiplier L_3 par -1 ...

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $A = PTP^{-1}$, on a $T = P^{-1}AP$, et donc : $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $A = PTP^{-1}$, où $T = 2I_3 + N$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

5.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$ (car $A \times 0_3 = 0_3 \times A$), donc $\mathcal{C}$ est non vide.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{C}$. Montrons que $aM + bN \in \mathcal{C}$.
 - * $aM + bN \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
 - * Puis :

$$\begin{aligned} A(aM + bN) &= aAM + bAN \\ &= aMA + bNA \\ &= (aM + bN)A \end{aligned} \quad \leftarrow M, N \in \mathcal{C}$$

Par conséquent : $aM + bN \in \mathcal{C}$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

5.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff M = MA \\ &\iff PTP^{-1}PQP^{-1} = PQP^{-1}PTP^{-1} \\ &\iff PTQP^{-1} = PQT^{-1}P^{-1} \\ &\iff TQ = QT \\ &\iff (2I_3 + N)Q = Q(2I_3 + N) \\ &\iff 2Q + NQ = 2Q + QN \\ &\iff NQ = QN \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \leftarrow A = PTP^{-1} \text{ et } Q = PMP^{-1} \\ \leftarrow PP^{-1} = P^{-1}P = I_3 \end{array}$$

Conclusion : $M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$.

5.c. Notons $\mathcal{C}' = \{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid NQ = QN\}$. Démontrer que $\mathcal{C}' = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$ puis en déduire une base de $\mathcal{C}'$.

- Soit $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} NQ = QN &\iff \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} d = 0 \\ e = a \\ f = b \\ g = 0 \\ h = d \\ i = e \\ 0 = 0 \\ 0 = g \\ 0 = h \end{cases} \\ &\iff Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}(I_3, N, N^2) \end{aligned}$$

Remarque

On structure bien cette question...
3 points, puis 2 sous-points dans le troisième !
En effet, 2 critères pour appartenir à $\mathcal{C}$: être dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et commuter avec A .

Vocabulaire

L'ensemble $\mathcal{C}$ (qui est un EV) est appelé **commutant de A** .

- La famille (I_3, N, N^2) est alors :
 - ✓ génératrice de $\mathcal{C}'$,
 - ✓ libre, en effet :

Conclusion : la famille (I_3, N, N^2) est une base de $\mathcal{C}'$.

5.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathcal{C} \iff AM = MA$$

$$\iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}'$$

$$\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid P^{-1}MP = aI_3 + bN + cN^2$$

$$\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid M = aI_3 + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1}$$

$$\iff \exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid M = aI_3 + b(A - 2I_3) + c(A - 2I_3)^2$$

question 5.b.

(I_3, N, N^2) est une base de $\mathcal{C}'$

$$\begin{aligned} PNP^{-1} &= P(T - 2I_3)P^{-1} = A - 2I_3 \\ PNP^2P^{-1} &= (PNP^{-1})^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $(I_3, (A - 2I_3), (A - 2I_3)^2)$ est une base de $\mathcal{C}$, et ainsi $\dim(\mathcal{C}) = 3$.

En gros...

On a fait une sorte de "changement d'inconnu" entre la recherche du commutant de N et celui de A ... Par conséquent : $\mathcal{C} \neq \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Rappel...

Par récurrence (à savoir faire en moins de deux minutes) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 + I_3 = A\}$.

6.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{R}$ n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle : $0_3 + I_3 \neq A$.

✗ Attention !

Cela ne signifie pas qu'il est non vide ! S'il était vide, passerions-nous vraiment 5 questions à l'étudier... ?

6.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

$$M \in \mathcal{R} \iff M^2 + I_3 = A$$

$$\iff PQ^2P^{-1} + I_3 = A$$

$$\iff Q^2 + P^{-1}I_3P = P^{-1}AP$$

$$\iff Q^2 + I_3 = T$$

$$\iff Q^2 + I_3 = 2I_3 + N$$

$$\iff Q^2 = I_3 + N$$

Conclusion : $M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$.

6.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

Supposons que $Q^2 = I_3 + N$. On a alors :

$$QN = Q(Q^2 - I_3)$$

$$= Q^3 - Q$$

$$= (Q^2 - I_3)Q$$

$$= NQ$$

Conclusion : si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

★ Classique ! ★

Ne pas hésiter sur cette question.

6.d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.

D'après la question précédente, si une matrice Q de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $Q^2 = I_3 + N$, alors elle commute avec N .

Réolvons donc l'équation $Q^2 = I_3 + N$ d'inconnue $Q \in \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Soit $Q \in \text{Vect}(I_3, N, N^2)$. Il existe alors des réels a, b, c , que l'on considère ensuite, tels que $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Dans ce cas :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Mais alors :

$$Q^2 = I_3 + N \iff \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{-1}{8} \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{-1}{2} \\ c = \frac{1}{8} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $Q^2 = I_3 + N$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $-\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathcal{R} \Leftrightarrow M^2 + I_3 = A$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}MP \in \{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid Q^2 = I_3 + N\}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}MP = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \pm \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

question 6(b)

question précédente

Conclusion : $\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}, -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \right\}$.

Remarque

Les raisonnements mis en place dans cette question 6 sont très proches de ceux de la question 5... Les calculs sont en revanche un peu différents. Sur cette fin d'exercice, on peut sans aucun problème tolérer que la copie contienne un peu moins de détails calculatoires...