

ÉNONCÉ

Une urne contient $n \geq 2$ boules distinctes $B_1, B_2, \dots, B_n$ que l'on tire successivement et avec remise. Pour tout $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel les boules $B_1, B_2, \dots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. Question de cours. Quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments ?
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1 .
3. Écrire une fonction en **Python** prenant en arguments deux entiers n et r (on supposera $1 \leq r \leq n$, sans le vérifier) et qui simule une réalisation de la variable aléatoire Y_r .
4. Préciser l'univers-image de Y_r . Calculer $\mathbb{P}(Y_r = r)$.
5. Montrer que l'évènement A_r : "on tire $r - 1$ boules différentes parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ lors des r premiers tirages sans jamais tirer les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$ et on tire la seule boule non tirée parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ au $(r + 1)$ -ième tirage" a pour probabilité :

$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2} r!}{n^{r+1}}$$

6. En déduire : $\mathbb{P}(Y_r = r + 1) = \frac{r(n - r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}$.
7. On fixe r . Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \dots, B_r$ soient sorties.
On pose $X_1 = W_1$ et pour tout $i \geq 2$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
 - 7.a. Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.
 - 7.b. En déduire l'espérance de Y_n .
 - 7.c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

♥ L'avis du chef ! ♥

Un exercice demandant une certaine maîtrise du calcul de probabilités par dénombrement : il faut s'entraîner ! Une variante du problème du collectionneur (on finit par des questions classiques sur le sujet en question 7.). On apprécie beaucoup !

Une urne contient $n \geq 2$ boules distinctes $B_1, B_2, \dots, B_n$ que l'on tire successivement et avec remise. Pour tout $r \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel les boules $B_1, B_2, \dots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

1. Question de cours. Quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments ?

QUESTION DE COURS 6.

2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1 .

- ✓ L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir la boule B_1 " est (par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne) de probabilité $\frac{1}{n}$.
- ✓ La variable aléatoire Y_1 prend alors comme valeur le rang de ce premier succès.

Conclusion : Y_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$. Elle admet donc une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(Y_1) = n ; \quad \mathbb{V}(Y_1) = n^2 - n$$

3. Écrire une fonction en **Python** prenant en arguments deux entiers n et r (on supposera $1 \leq r \leq n$, sans le vérifier) et qui simule une réalisation de la variable aléatoire Y_r .

On s'inspire de ce qui est fait dans QUESTION CLASSIQUE 14...

```
1 def simule_Y(n,r):
2     L=[] #contiendra les numéros déjà tirées entre 1 et r
3     c=0
4     while len(L)<r:
5         t=rd.randint(1,n+1) #tirage d'une boule entre 1 et n
6         c=c+1
7         if t<=r and t not in L:
8             L.append(t)
9     return c
```

Remarque

Afin d'éviter un nom ambigu, l'énoncé aurait simplement pu demander : "Préciser $Y_r(\Omega)$."

4. Préciser l'univers-image de Y_r . Calculer $\mathbb{P}([Y_r = r])$.

- Montrons que $Y_r(\Omega) = \llbracket r; +\infty \rrbracket$. Procédons par double inclusion.



Puisqu'une seule boule est tirée à chaque tirage, il faut au moins r tirages pour obtenir les r boules différentes.

Conclusion : $Y_r(\Omega) \subset \llbracket r; +\infty \rrbracket$.



Soit $k \in \llbracket r; +\infty \rrbracket$. Montrons que $[Y_r = k] \neq \emptyset$.

Considérons l'issue consistant à :

- × obtenir la boule B_1 au premier tirage,
- × obtenir la boule B_2 au deuxième tirage,
- × ...
- × obtenir la boule B_{r-1} au $(r-1)$ -ième tirage,
- × obtenir la boule B_{r-1} des tirages r à $k-1$,
- × obtenir la boule B_r au tirage k .

Cette issue réalise l'évènement $[Y_r = k]$. On a ainsi établi : $\forall k \in \llbracket r; +\infty \rrbracket, [Y_r = k] \neq \emptyset$.

Conclusion : $\llbracket r; +\infty \rrbracket \subset Y_r(\Omega)$.

Remarque

Le jury n'attendait peut-être pas une démonstration de ce résultat ; mais il faut être en mesure d'en fournir une si besoin.

♣ Méthode !

Il faut en fait montrer que $k \in Y_r(\Omega)$, autrement dit, il faut démontrer l'existence d'une issue $\omega \in \Omega$ telle que $Y_r(\omega) = k$: on va faire mieux en exhibant une telle issue.

Conclusion : $Y_r(\Omega) = \llbracket r; +\infty \rrbracket$.

$[Y_r = r]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient les boules $B_1, \dots, B_r$ en r tirages

- si, et seulement si, on tire une des r boules $B_1, \dots, B_r$ au premier tirage, puis une des $r-1$ boules restantes au second, ..., puis la dernière restant au r -ième tirage.

Par indépendance des tirages (effectués sans remise) et équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_r = r]) &= \frac{r}{n} \times \frac{r-1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{r!}{n^r} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y_r = r]) = \frac{r!}{n^r}$.

AUTRE MÉTHODE...

On assimile chaque issue à un r -uplet d'entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Toutes les issues étant équiprobables (dû au fait que les tirages sont avec remise), on a :

$$\mathbb{P}([Y_r = r]) = \frac{\text{Card}([Y_r = r])}{\text{Card}(\Omega)}$$

Or :

- * L'univers Ω est l'ensemble des issues ; il est donc de cardinal n^r car il y a n^r r -uplets d'entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$.
- * Une issue réalisant $[Y_r = r]$ s'assimile alors à un r -uplet contenant les entiers $1, 2, \dots, r$. Il y en a $r!$ différents : autant que de bijections d'un ensemble à r éléments (les entiers de 1 à r) dans un ensemble à r éléments (leur place dans le r -uplet). Ainsi : $\text{Card}([Y_r = r]) = r!$.

Conclusion : $\mathbb{P}([Y_r = r]) = \frac{r!}{n^r}$.

À retenir...

Il y a n choix pour chaque composante du r -uplet, donc n^r r -uplets possibles avec des éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

5. Montrer que l'évènement A_r : "on tire $r - 1$ boules différentes parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ lors des r premiers tirages sans jamais tirer les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$ et on tire la seule boule non tirée parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ au $(r + 1)$ -ième tirage" a pour probabilité :

$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2} r!}{n^{r+1}}$$

On assimile maintenant chaque issue à un $(r + 1)$ -uplet d'entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Toutes les issues étant équiprobables (dû au fait que les tirages sont avec remise), on a :

$$\mathbb{P}(A_r) = \frac{\text{Card}(A_r)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Modification

L'énoncé initial introduisait un évènement légèrement différent, mais il était alors moins évident d'en déduire la question suivante !

Or :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues ; il est donc de cardinal n^{r+1} car il y a n^{r+1} $(r + 1)$ -uplets possibles avec les entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$.
- Choisir une issue réalisant A_r équivaut ainsi à :
 - * choisir une des boules qui sera tirée deux fois sur les r premiers tirages : r possibilités,
 - * obtenir cette boule à deux tirages différents parmi les r premiers tirages, le dernier étant réservée à une boule qui n'a pas déjà été tirée pour arrêter l'expérience (autrement dit positionner son numéro deux fois dans les r premières composantes du $(r + 1)$ -uplet) : $\binom{r}{2}$ possibilités,
 - * obtenir les $r - 1$ boules restantes dans un ordre quelconque lors des $r - 1$ autres tirages (autrement dit positionner les $r - 1$ numéros restants dans les $r - 1$ composantes restantes du $r + 1$ -uplet) : $(r - 1)!$ possibilités.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A_r) &= r \times (r - 1) \binom{r}{2} \times (r - 2)! \\ &= \binom{r}{2} r! \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A_r) = \frac{\binom{r}{2} r!}{n^{r+1}}$.

6. En déduire : $\mathbb{P}([Y_r = r + 1]) = \frac{r(n - r)r! + \binom{r}{2} r!}{n^{r+1}}$.

Notons C_r l'évènement "on tire $r - 1$ boules différentes parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ ainsi qu'une boule parmi les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$ sur les r premiers tirages puis on tire la seule boule non tirée parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ au $(r + 1)$ -ième tirage".

De la sorte :

$$[Y_r = r + 1] = A_r \cup C_r$$

et A_r et C_r sont incompatibles... Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_r = r + 1]) &= \mathbb{P}(A_r \cup C_r) \\ &= \mathbb{P}(A_r) + \mathbb{P}(C_r) \end{aligned} \quad \leftarrow A_r \text{ et } C_r \text{ sont incompatibles}$$

Déterminons maintenant $\mathbb{P}(C_r)$. Comme en question précédente :

$$\mathbb{P}(C_r) = \frac{\text{Card}(C_r)}{\text{Card}(\Omega)}$$

- $\text{Card}(\Omega) = n^{r+1}$, comme en question précédente ;
- Choisir une issue réalisant C_r c'est :
 - * choisir une des boules $B_{r+1}, \dots, B_n$: $n - r$ possibilités,
 - * obtenir cette boule sur un des r premiers tirages (le dernier étant pour une de boules $B_1, \dots, B_r$ pour arrêter l'expérience) : r possibilités,

Pourquoi ?

On demande d'en déduire. On cherche donc un lien entre A_r et $[Y_r = r + 1]$... et on remarque que $A_r \subset [Y_r = r + 1]$. On pose donc C_r comme le complémentaire de A_r dans $[Y_r = r + 1]$.

* obtenir les r boules $B_1, \dots, B_r$ dans un ordre quelconque sur les r tirages restants : $r!$ possibilités.

D'où :

$$\text{Card}(C_r) = r(n-r)r!$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(C_r) = \frac{r(n-r)r!}{n^{r+1}}$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}([Y_r = r+1]) = \frac{r(n-r)r! + \binom{r}{2}r!}{n^{r+1}}.$$

7. On fixe r . Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \dots, B_r$ soient sorties.

On pose $X_1 = W_1$ et pour tout $i \geq 2$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.

7.a. Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.

- Si $i = 1$:

Conclusion : X_1 suit la loi certaine égale à 1.

- Si $i \geq 2$:

- ✓ Après le tirage ayant permis d'obtenir le $(i-1)$ -ème numéro différent, l'expérience s'assimile à une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès "obtenir une des $r - (i-1)$ parmi les boules $B_1, \dots, B_r$ qui n'ont pas déjà été tirées" a pour probabilité $\frac{r-(i-1)}{n}$, par équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne.

- ✓ La variable aléatoire X_i prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : X_i suit la loi géométrique de paramètre $\frac{r-i+1}{n}$.

★ Classique ! ★

Cette question traite du problème du collectionneur, un grand classique ! Voir QUESTION CLASSIQUE 14 et EML2024Appli-Exercice3

7.b. En déduire l'espérance de Y_n .

Prenons donc le cas $r = n$. On a ainsi $Y_n = W_n$ et par ailleurs :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= W_1 + \sum_{i=2}^n (W_i - W_{i-1}) \\ &= W_1 + W_n - W_1 \\ &= W_n \\ &= Y_n \end{aligned} \quad \leftarrow \text{télescopage}$$

Puisque $X_1, \dots, X_n$ admettent toutes une espérance (X_1 est constante et $X_2, \dots, X_n$ suivent une loi géométrique), la variable aléatoire Y_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) && \leftarrow \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \sum_{i=2}^n \mathbb{E}(X_i) && \leftarrow \text{question précédente} \\ &= 1 + \sum_{i=2}^n \frac{n}{n-i+1} && \leftarrow k = n-i+1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

7.c. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On déroule toute la QUESTION CLASSIQUE 21...

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$.