

ÉNONCÉ

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une balle noire non numérotée et $n - 1$ balles blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : "le i -ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n .

2. 2.a. Pour tout $i \in \llbracket 2; n - 1 \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$.

2.b. Utiliser la formule des probabilités composées pour établir :

$$\forall k \in X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$$

2.c. Reconnaître la loi de X_n puis donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n - k}{n(n - 1)}$$

3.b. En déduire $\mathbb{P}([Y = 0])$.

3.c. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. *On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre N .*

```
1 def simul_X(n):
2     N=n
3     u=rd.randint(1,N+1)
4     X=1
5     while u!=N:
6         N=...
7         u=...
8         X=...
9     return X
```

4.b. Modifier la fonction de la question précédente en ajoutant une ou plusieurs lignes, de sorte que son exécution renvoie, en plus d'une réalisation de X_n , une réalisation de la variable aléatoire Y .

CORRIGÉ

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une balle noire non numérotée et $n - 1$ balles blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : "le i -ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n .

Démontrons que $X_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$. Procédons par double inclusion.

$\square$ Puisque X_n est le rang d'apparition de la balle noire, on a déjà $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Mais, puisque les tirages sont effectués sans remise et qu'il y a n balles dans l'urne, on a en fait :

$$X_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$$

$\supset$ Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- * Si $k = 1$: l'issue consistant à tirer la balle noire au premier tirage réalise l'événement $[X_n = 1]$.
Ainsi $[X_n = 1] \neq \emptyset$.
- * Si $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$: l'issue consistant à tirer pour tout $i \in \llbracket 1; k - 1 \rrbracket$, la balle blanche numérotée i au i -ème tirage puis la noire au k -ième tirage réalise l'événement $[X_n = k]$.
Ainsi $[X_n = k] \neq \emptyset$.

On a établi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, [X_n = k] \neq \emptyset$$

D'où :

$$\llbracket 1; n \rrbracket \subset X_n(\Omega)$$

Conclusion : $X_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$.

2. 2.a. Pour tout $i \in \llbracket 2; n - 1 \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$.

Soit $i \in \llbracket 2; n - 1 \rrbracket$.

Supposons l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$ réalisé. Les $i - 1$ premiers tirages ont ainsi tous donné une balle blanche. Par conséquent, les tirages étant effectués sans remise : pour le i -ème tirage, l'urne est composée de $n - (i - 1)$ balles, dont toujours la noire.

D'où le résultat, par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne.

$$\text{Conclusion : pour tout } i \in \llbracket 2; n - 1 \rrbracket, \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - i}{n - i + 1}.$$

2.b. Utiliser la formule des probabilités composées pour établir :

$$\forall k \in X_n(\Omega), \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Si $k = 1$:

L'événement $[X_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche directement la balle noire.

Ainsi :

$$[X_n = 1] = N_1$$

Et alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \mathbb{P}(N_1) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \swarrow \text{équiprobabilité du choix des balles}$$

- Si $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$:

L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k - 1$ premiers tirages ont donné des balles blanches et la balle noire a été tirée au k -ième. D'où :

$$\begin{aligned} [X_n = k] &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \right) \cap N_k \\ &= B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées (FPC), licite car $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \end{aligned}$$

Or :

Remarque

L'énoncé initial disait de "donner" : seul le résultat suffisait donc.

Rédaction

On s'imprègne bien de la rédaction de ce type de questions ! On suppose l'événement qui conditionne réalisé, puis, sous cette hypothèse, on décrit l'urne et on donne la probabilité de tirer une boule blanche au tirage i .

Remarque

En prêtant un peu attention à l'énoncé, on remarque que l'événement N_n n'est pas défini. Simple oubli semble-t-il, utilisons-le quand-même, sa définition est implicite.

$$* \mathbb{P}(B_1) = \frac{n-1}{n}$$

* et, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait en question précédente :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-k+1}$$

D'où, d'après la question précédente, licite car $k \leq n$, donc $k-1 \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \times 1 \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \text{télescoping}$$

Conclusion : $\forall k \in X_n(\Omega), \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$.

2.c. Reconnaître la loi de X_n puis donner son espérance et sa variance.

D'après la question précédente, on voit que X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Conclusion : X_n possède une espérance et une variance et : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{n^2-1}{12}$.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$[X_n = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé si, et seulement si, la balle noire est tirée au k -ième tirage et la balle numéro 1 n'a pas été tirée

si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné une balle blanche numérotée 0 et le k -ième tirage la noire

En notant, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, l'évènement A_i : "le i -ième tirage donne une balle blanche numérotée 0", on a ainsi :

$$[X_n = k] \cap [Y = 0] = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap N_k$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-2}}(A_{k-1}) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+3} \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times (n-k) \times 1 \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{FPC, licite car } \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \neq 0 \\ \text{analogue à ce qui a été fait en question 2.a.} \end{array}$$

Remarque

Ici, inutile de détailler le calcul des probabilités conditionnelles : les choses ont été bien détaillées en question 2.a. et le raisonnement est analogue. En détaillant le produit de la sorte, cela permet de bien voir les différentes probabilités et donc de mettre en avant le raisonnement mis en place.

Conclusion : $\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$.

3.b. En déduire $\mathbb{P}([Y = 0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X_n = k])_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n(n-1)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{question précédente} \\ \searrow i = n - k \end{array}$$

→ Réflexe !

Grâce à la question précédente, on connaît tous les $\mathbb{P}(A_i \cap B)$, et on veut $\mathbb{P}(B)$: FPT !! Est-ce que $(A_i)_i$ est bien un sce ? Oui, alors on fonce !

Remarque

Le changement d'indice n'était pas nécessaire. Il est aussi possible de décomposer la somme en deux, mais c'est plus calculatoire...

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{1}{2}$.

3.c. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

On sait que $Y(\Omega) = \{0; 1\}$. Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{1}{2}$...

Conclusion : Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre N .

```

1 def simul_X(n):
2     N=n
3     u=rd.randint(1,N+1)
4     X=1
5     while u!=N:
6         N=...
7         u=...
8         X=...
9     return X

```

Voici :

```

1 def simul_X(n):
2     N=n
3     u=rd.randint(1,N+1)
4     X=1
5     while u!=N:
6         N=N-1
7         u=rd.randint(1,N+1)
8         X=X+1
9     return X

```

Rappel...

Aux concours, il suffit d'écrire sur la copie les lignes à compléter.

4.b. Modifier la fonction de la question précédente en ajoutant une ou plusieurs lignes, de sorte que son exécution renvoie, en plus d'une réalisation de X_n , une réalisation de la variable aléatoire Y .

```

1 def simul_X(n):
2     N=n
3     u=rd.randint(1,N+1)
4     X=1
5     Y=0
6     while u!=N:
7         N=N-1
8         u=rd.randint(1,N+1)
9         X=X+1
10        if u==1: #on code par le numéro 1 la boule numéro 1
11            Y=1
12    return X,Y

```