

ÉNONCÉ

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O . Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 (l'origine) avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **simul_X(n,p)** renvoie une réalisation de X_n .
2. **2.a.** Donner la loi de X_1 .
2.b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i .
2.c. En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ puis reconnaître la loi de T .
3. **3.a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. On distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.
3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour établir :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$$

4. **4.a.** Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.
4.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.
Déduire alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

5. **5.a.** Montrer que : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

5.b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. **6.a.** Montrer, en utilisant la question **4.a.**, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$$

6.b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

6.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

- 6.d.** Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$$

CORRIGÉ

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O . Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 (l'origine) avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **simul_X(n,p)** renvoie une réalisation de X_n .

```
1 def simulX(n,p):
2     X=0
3     for k in range(1,n+1):
4         if rd.random()<p:
5             X=X+1
6         else:
7             X=0
8     return X
```

2. 2.a. Donner la loi de X_1 .

La variable aléatoire X_1 ne prend que deux valeurs : 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$.

Conclusion : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

2.b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si $k = 1$:

$$[T = 1] = [X_1 = 0]$$

- Si $k \geq 2$:

$[T = k]$ est réalisé si, et seulement si, k est le premier instant du retour à l'origine du mobile

si, et seulement si, le mobile avance des instants 1 à $k - 1$, puis retourne à l'origine à l'instant k

D'où :

$$[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0] \right) \cap [X_k = 0]$$

Les deux cas se regroupent.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*, [T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0] \right) \cap [X_k = 0]$.

Rappel...

Par convention : $\bigcap_{i=1}^0 \dots = \Omega$

2.c. En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ puis reconnaître la loi de T .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T = k]) &= \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0] \right) \cap [X_k = 0] \right) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \neq 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0]}([X_2 \neq 0]) \times \dots \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0] \cap \dots \cap [X_{k-2} \neq 0]}([X_{k-1} \neq 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1 \neq 0] \cap \dots \cap [X_{k-1} \neq 0]}([X_k = 0]) \\ &= p^{k-1}(1 - p) \end{aligned}$$

formule des probabilités composées
licite car $\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \neq 0] \right) \neq 0$

En effet, peu importe sa position, la probabilité que le mobile avance est p et celle qu'il retourne à l'origine est $1 - p$.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre $1 - p$.

Attention !

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$ ne sont pas indépendantes ! La position du mobile à un instant dépend bien évidemment de sa position à l'instant précédent ! En définissant l'évènement A_i "le mobile avance à l'instant i ", on aurait $[T = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \cap \overline{A_k}$, et ici, les évènements $A_1, A_2, \dots$ sont indépendants ! Mais ce n'est pas dans l'esprit de l'exercice.

3. 3.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. On distinguera les cas $n = 0$ et $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$:
 X_0 est constante égale à 0, donc $X_0(\Omega) = \{0\}$.
- Si $n \geq 1$.
Procédons par double inclusion.

$\square$ Jusqu'à l'instant n , le mobile a effectué au plus n déplacements vers la droite, donc on a déjà :

$$X_n(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$$

$\square$ Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Démontrons que $[X_n = k] \neq \emptyset$.

× Si $k = 0$:

L'issue consistant à rester à l'origine du repère des instants 0 à n réalise l'évènement $[X_n = 0]$, donc

$$[X_n = 0] \neq \emptyset$$

× Si $k \geq 1$:

Considérons l'issue consistant à :

- rester à l'origine du repère durant les $n - k$ premiers instants,
- se déplacer vers la droite lors des k derniers.

Cette issue réalise l'évènement $[X_n = k]$. Donc :

$$[X_n = k] \neq \emptyset$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Les deux cas se regroupent.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour établir :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ comme système complet d'évènements :

Remarque

C'est bien le cas, puisque $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 0]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n = 0]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1 - p) \\ &= (1 - p) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$

$\hookrightarrow X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

4. 4.a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

$[X_{n+1} = k]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile se situe en position k à l'instant $n+1$

si, et seulement si, puisque $k \neq 0$, le mobile se situait en position $k-1$ à l'instant n et a avancé

D'où :

$$[X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap A_{n,n+1}$$

où $A_{n,n+1}$ est l'évènement "le mobile se déplace vers la droite de l'instant n à l'instant $n+1$ ".

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap A_{n,n+1}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ indépendance des déplacements et X_n ne fait intervenir que les n premiers déplacements

Remarque

Il est également possible d'utiliser la FPT avec $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ comme SCE. Le raisonnement pour simplifier la somme est alors analogue...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

4.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

Déduire alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- Procédons par récurrence.

* **Initialisation.** Pour $n = 1$:

Immédiat d'après la question 3.. L'initialisation est vérifiée.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

Et montrons : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k(1-p)$.

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Deux cas se présentent :

× Si $k = 0$:

Immédiat d'après la question 3..

× Si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= p\mathbb{P}([X_n = k-1]) \\ &= pp^{k-1}(1-p) \quad \leftarrow \text{par hypothèse de récurrence, puisque } k-1 \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ &= p^k(1-p) \end{aligned}$$

On a bien établi :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k(1-p)$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, on a : $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) \\ &= (1-p) \frac{1-p^n}{1-p} \\ &= 1-p^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

Explication :

L'évènement $[X_n = n]$ est réalisé si, et seulement si, des instants 1 à n le mobile a avancé. Ce qui se produit avec une probabilité égale à p^n .

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$.

5. 5.a. Montrer que : $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} &= \frac{(p-1)^2}{(1-p)^2} \\ &= 1 \\ &= \sum_{k=1}^1 kp^{k-1} \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

Supposons $\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$ et démontrons $\sum_{k=1}^n kp^{k-1} = \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(1-p)^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kp^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^{n-1} \quad \leftarrow \text{hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

♣ **Méthode !**

Pour changer de QUESTION CLASSIQUE 2.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + (1-p)^2 np^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + np^{n-1} - 2np^n + np^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{np^{n+1} + (-n-1)p^n + 1}{(1-p)^2} \\
&= \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.$

5.b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}.$

Soit $n \in \mathbb{[2; +\infty[}$. On sait que $X_n(\Omega) = \mathbb{[0; n]}$, ainsi $X_n(\Omega)$ est fini, donc X_n admet une espérance; et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}([X_n = k]) + n\mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kp^k(1-p) + np^n \\
&= (1-p)p \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \\
&= (1-p)p \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p}{1-p} + \frac{np^n(1-p)}{1-p} \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} + p - np^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-p^{n+1} + p}{1-p}
\end{aligned}$$

↪ questions 3.b. et ??

↪ question précédente

✗ Attention !
Il y a plusieurs expressions de $\mathbb{P}([X_n = k])$, selon que $k = n$ ou pas.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{[2; +\infty[}, \mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}.$ Et cette expression est encore valable pour $n \in \{0; 1\}.$

6. 6.a. Montrer, en utilisant la question 4.a., que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{[0; n+1]}$, ainsi $X_{n+1}(\Omega)$ est fini, donc X_{n+1} admet un moment d'ordre 2; et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p \mathbb{P}([X_n = k-1]) \\
&= p \sum_{i=0}^n (i+1)^2 \mathbb{P}([X_n = i]) \\
&= p \sum_{i=0}^n i^2 \mathbb{P}([X_n = i]) + 2p \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}([X_n = i]) + p \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X_n = i]) \\
&= p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)
\end{aligned}$$

↪ question 4.a.

↪ $i = k-1$

↪ $X_n(\Omega) = \mathbb{[0; n]}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$

6.b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= p\mathbb{E}(X_n^2) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= p\mathbb{E}(X_n^2) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= p\mathbb{E}(X_n^2) + p(2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= pu_n + \frac{2p^2 - 2p^{n+2} + p - p^2 + 2p^{n+2}}{1-p} \\
 &= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}
 \end{aligned}$$

question précédente

question 5.b.

Remarque

Si on bloque un peu pendant le calcul, ne pas hésiter à partir du membre de droite...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

6.c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi une suite arithmético-géométrique.

* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x = px + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff x = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

Notons $\alpha = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

- Considérons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. On a alors :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p} \\ \alpha = p\alpha + \frac{p(1+p)}{1-p} \end{cases}$$

En soustrayant la ligne 2 à la ligne 1, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha = p(u_n - \alpha)$$

Par conséquent, la suite $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $u_0 - \alpha$. Or :

$$\begin{aligned}
 u_0 - \alpha &= \mathbb{E}(X_0^2) - \frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\
 &= -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{-p(1-p) - p(1+p)}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{-2p}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

X₀ est constante égale à 0

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{-2p}{(1-p)^2} p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

- D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
 &= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
 &= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (2n-1)(1-p)p^{n+1}}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (2n-1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p(1+p) - (2n+1)p^{n+1} + (2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1})$.

6.d. Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque X_n possède un moment d'ordre 2, elle possède également une variance et ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p} \right)^2 \quad \leftarrow \text{question précédente} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(1-p^n)^2) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 + p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p + 2p^{n+1} - p^{2n+1}) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.