

ÉNONCÉ

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours. Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soient p, q, r trois réels de $]0; 1[$ tels que $p + q + r = 1$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\} \quad ; \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) = p \quad ; \quad \mathbb{P}([X_n = -1]) = q \quad ; \quad \mathbb{P}([X_n = 0]) = r$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

2. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X_1 .

3. **3.a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

3.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n)$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

4.a. Déterminer p_1 et p_2 .

4.b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} .

4.c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$$

4.d. En déduire la loi de Y_n .

4.e. Pourrait-on, à l'aide de la question 3., trouver directement la loi de Y_n ?

5. Établir l'inégalité $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

6. Calculer $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

CORRIGÉ

♥ L'avis du chef ! ♥

Très bon exercice, assez classique sur des variables aléatoires discrètes. Pas de difficulté particulière pour un exercice d'oral.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours. Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

QUESTION DE COURS 61

Soient p, q, r trois réels de $]0; 1[$ tels que $p + q + r = 1$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\} ; \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) = p ; \quad \mathbb{P}([X_n = -1]) = q ; \quad \mathbb{P}([X_n = 0]) = r$$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

2. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X_1 .

```
1 def simuleX(p,q,r):
2     t=rd.random()
3     if t<p:
4         return 1
5     elif t>p and t<q+p: #ligne qui se produit avec une proba q
6         return -1
7     else:
8         return 0
```

3. 3.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, on a :

$$Y_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$$

Ensuite, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in [Y_n = 0] &\iff \prod_{k=1}^n X_k(\omega) = 0 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket / X_k(\omega) = 0 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket / \omega \in [X_k = 0] \\ &\iff \omega \in \bigcup_{k=1}^n [X_k = 0] \end{aligned}$$

D'où : $[Y_n = 0] = \bigcup_{k=1}^n [X_k = 0]$ et ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n = 0]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n [X_k = 0]\right) && \swarrow \text{loi de Morgan} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \neq 0]\right) && \swarrow \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k \neq 0]) \\ &= 1 - (1 - r)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y_n = 0]) = 1 - (p + q)^n$.

3.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✓ Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_k admet une espérance (car $X_k(\Omega)$ est fini),
- ✓ $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Ainsi Y_n admet une espérance, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \\ &= (p - q)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(Y_n) = (p - q)^n$.

✓ Rigueur !

En fait, on ne peut pas encore conclure sur l'égalité. On a seulement :

$$Y_n(\Omega) \subset \{-1; 0; 1\}$$

→ Réflexe !

Si on a du mal à 'voir', on revient à la définition d'un événement : c'est un ensemble d'issues. Et on cherche à caractériser le fait qu'une issue appartienne à $[Y_n = 0]$. Puis on utilise le cours :

$$\omega \in \bigcup_{j \in I} A_j \iff \exists j \in I / \omega \in A_j$$

✍ Rédaction

On pourrait se passer des équivalences qui précèdent et donner directement ce résultat.

Remarque

La propriété garantit l'existence de $\mathbb{E}(Y_n)$. Ici, on pourrait également dire que $Y_n(\Omega)$ est fini, donc Y_n admet une espérance.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.

4.a. Déterminer p_1 et p_2 .

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ &= p \end{aligned}$$

♣ Méthode !

On pourrait également utiliser la FPT avec $([X_1 = -1], [X_1 = 0], [X_1 = 1])$ comme SCE.

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}([Y_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 X_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}([(X_1 X_2 = 1) = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = -1] \cap [X_2 = -1])) \\ &= \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = -1] \cap [X_2 = -1]) \\ &= p^2 + q^2 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow ([X_1 X_2 = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = -1] \cap [X_2 = -1])$
 $\hookrightarrow$ incompatibilité de $[X_1 = 1]$ et $[X_1 = -1]$, donc des deux événements en jeu
 $\hookrightarrow$ indépendance de X_1 et X_2

4.b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}([Y_{n+1} = 1]) \\ &= \mathbb{P}([Y_n X_{n+1} = 1]) \\ &= \mathbb{P}([(Y_n X_{n+1} = 1) = ([Y_n = -1] \cap [X_{n+1} = -1]) \cup ([Y_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1])]) \\ &= \mathbb{P}([Y_n = -1] \cap [X_{n+1} = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1]) \\ &= q\mathbb{P}([Y_n = -1]) + p\mathbb{P}([Y_n = 1]) \\ &= q(1 - \mathbb{P}([Y_n = 0])) - \mathbb{P}([Y_n = 1]) + p \times p_n \\ &= q(p + q)^n + (p - q)p_n \end{aligned}$$

$\hookrightarrow [Y_n X_{n+1} = 1] = ([Y_n = -1] \cap [X_{n+1} = -1]) \cup ([Y_n = 1] \cap [X_{n+1} = 1])$
 $\hookrightarrow$ incompatibilité de $[Y_n = -1]$ et $[Y_n = 1]$, donc des deux événements en jeu
 $\hookrightarrow Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, Y_n et X_{n+1} sont indépendantes question 3.a.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = q(p + q)^n + (p - q)p_n$.

4.c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2}$$

. Procédons par récurrence.

• **Initialisation.** Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(p + q)^1 + (p - q)^1}{2} &= p \\ &= p_1 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ question 4.a.

L'initialisation est vérifiée.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p_n = \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2}$ et démontrons que $p_{n+1} = \frac{(p + q)^{n+1} + (p - q)^{n+1}}{2}$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= q(p + q)^n + (p - q)p_n \\ &= q(p + q)^n + (p - q)\frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2} \\ &= \frac{2q(p + q)^n + (p - q)(p + q)^n + (p - q)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{(p + q)^n(2q + p - q) + (p - q)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{(p + q)^{n+1} + (p - q)^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ hypothèse de récurrence

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2}$.

4.d. En déduire la loi de Y_n .

Puisque $Y_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n = -1]) &= 1 - \mathbb{P}([Y_n = 0]) - \mathbb{P}([Y_n = 1]) \\ &= (p + q)^n - \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ questions 3.a. et 4.c.

Conclusion : $Y_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$

$$\mathbb{P}([Y_n = 0]) = 1 - (p + q)^n ; \quad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2} ; \quad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = \frac{(p + q)^n - (p - q)^n}{2}$$

4.e. Pouvaient-on, à l'aide de la question 3., trouver directement la loi de Y_n ?

Et bien oui ! En effet, puisque $Y_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, on a :

- premièrement :

$$\mathbb{P}([Y_n = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = 0]) + \mathbb{P}([Y_n = 1]) = 1$$

D'où, d'après la question 3.a. :

$$\mathbb{P}([Y_n = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = 1]) = (p + q)^n \quad (1)$$

- deuxièmement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= -1\mathbb{P}([Y_n = -1]) + 0\mathbb{P}([Y_n = 0]) + 1\mathbb{P}([Y_n = 1]) \\ &= -\mathbb{P}([Y_n = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = 1]) \end{aligned}$$

D'où, d'après la question 3.b.

$$-\mathbb{P}([Y_n = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = -1]) = (p - q)^n \quad (2)$$

Enfin, en additionnant (1) et (2) puis en soustrayant (2) à (1), on obtient :

$$\mathbb{P}([Y_n = 1]) = \frac{(p + q)^n + (p - q)^n}{2} ; \quad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = \frac{(p + q)^n - (p - q)^n}{2}$$

5. Établir l'inégalité $(p + q)^n > (p - q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.

- Travaillons par équivalence :

$$\begin{aligned} (p + q)^n > (p - q)^{2n} &\iff (p + q)^n > ((p - q)^2)^n \\ &\iff p + q > (p - q)^2 \\ &\iff p + q > p^2 + q^2 - 2pq \\ &\iff p(1 - p) + q(1 - q) + 2pq > 0 \end{aligned}$$

↙ stricte croissance de $\cdot^n$ sur $\mathbb{R}^+$, licite car $p + q$ et $(p - q)^2$ sont dans $\mathbb{R}^+$

Or $p, q \in]0; 1[$, donc

$$p(1 - p) > 0 ; \quad q(1 - q) > 0 ; \quad 2pq > 0$$

D'où :

$$p(1 - p) + q(1 - q) + 2pq > 0$$

Ainsi, par équivalences, on a démontré :

$$(p + q)^n > (p - q)^{2n}$$

- * On sait que $Y_n(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$, ainsi $Y_n(\Omega)$ est fini donc Y_n admet un moment d'ordre 2 et, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^2) &= (-1)^2\mathbb{P}([Y_n = -1]) + 0^2\mathbb{P}([Y_n = 0]) + 1^2\mathbb{P}([Y_n = 1]) \\ &= \mathbb{P}([Y_n = -1]) + \mathbb{P}([Y_n = 1]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Y_n = 0]) \\ &= (p + q)^n \end{aligned}$$

↙ question 3.a.

- * Ainsi Y_n admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 \\ &= (p + q)^n - (p - q)^{2n} \end{aligned}$$

↙ question 3.b.

Conclusion : $\mathbb{V}(Y_n) = (p + q)^n - (p - q)^{2n}$.

6. Calculer $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

Puisque Y_n et Y_{n+1} admettent un moment d'ordre 2, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= \mathbb{E}(Y_n Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_{n+1}) \\ &= \mathbb{E}(Y_n^2 X_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(Y_n X_{n+1}) \\ &= \mathbb{E}(Y_n^2)\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)^2\mathbb{E}(X_{n+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_{n+1})\mathbb{V}(Y_n) \\ &= (p - q)((p + q)^n - (p - q)^{2n}) \\ &= (p - q)(p + q)^n - (p - q)^{2n+1} \end{aligned}$$

↙ indépendance de Y_n et X_{n+1} et donc, par lemme des coalitions de Y_n^2 et X_{n+1}
↙ formule de Koenig-Huygens

Conclusion : $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = (p - q)(p + q)^n - (p - q)^{2n+1}$.

Remarque

Bien évidemment, si on a une idée d'une bon 'point de départ', on peut en partir puis reconstruire chacun des deux membres. Le raisonnement par équivalences est toutefois utile quand on manque un peu d'inspiration... À savoir manipuler !

Remarque

À l'oral, on dit 'variance égale moment d'ordre 2 moins carré de l'espérance'.