

ÉNONCÉ

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

PARTIE 1

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.
2. Exprimer U en fonction de T . En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.

PARTIE 2

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
 - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
 - pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i -ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.
3. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$, simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .
 4. **Loi de X .**
 - 4.a. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
 - 4.b. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.
 - 4.c. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
 5. **Loi de Y .**
 - 5.a. Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.
 - 5.b. En déduire que $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
 - 5.c. Déterminer la loi de Y .

On admet que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}(1 - p + p^2)$.
 6. Donner la loi de Z et son espérance.
 7. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.
 8. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{Cov}(Y, Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

CORRIGÉ

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

PARTIE 1

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.

- ✓ L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir une boule noire" a pour probabilité q .
- ✓ La variable aléatoire T prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Important !

Il faut bien identifier la "bonne" expérience et la "bonne" VA (autrement dit, ce qu'elle prend comme valeurs) pour reconnaître une loi usuelle.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre q et :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad \mathbb{P}(T = n) = qp^{n-1} ; \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{q} ; \quad \mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$$

2. Exprimer U en fonction de T . En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.

- Puisque U prend comme valeur le nombre de balles blanches obtenues, on a :

$$U = T - 1$$

- La variable aléatoire U admet alors une espérance et une variance, comme fonction affine d'une variable aléatoire admettant espérance et variance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(T - 1) \\ &= \mathbb{E}(T) - 1 && \swarrow \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(U) &= \mathbb{V}(T - 1) \\ &= \mathbb{V}(T) \\ &= \frac{p}{q^2} \end{aligned}$$

Rappel...

Si X admet une variance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Conclusion : U admet une espérance et une variance, et : $\mathbb{E}(U) = \frac{p}{q}$, $\mathbb{V}(U) = \frac{p}{q^2}$.

PARTIE 2

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
 - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
 - pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i -ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.
3. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$, simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X .

Voici une proposition :

```
1 def simule_X(p):
2     b=0 #vaudra 1 dès qu'on aura eu une blanche
3     n=0 #vaudra 1 dès qu'on aura eu une noire
4     x=0
5     while b==0 or n==0: #on s'arrête quand b=n=1
6         if rd.random()<p: #se produit avec une proba p
7             b=1
8         else:
9             n=1
10        x=x+1
11    return x
```

4. Loi de X .

4.a. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

$[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné la même couleur et le k -ième tirage l'autre couleur

si, et seulement si, (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule blanche et le k -ième tirage une boule noire) ou (les tirages 1 à $k-1$ ont donné une boule noire et le k -ième tirage une boule blanche)

D'où :

$$[X = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}\left((B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \times \mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= p^{k-1}q + q^{k-1}p \end{aligned}$$

incompatibilité de N_1 et B_1 , donc des événements en jeu
tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des événements en jeu

Conclusion : pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([X = k]) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

4.b. Vérifier par le calcul que $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} (qp^i + pq^i) \\ &= q \sum_{i=1}^{+\infty} p^i + p \sum_{i=1}^{+\infty} q^i \\ &= q \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i - 1 \right) + p \left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^i - 1 \right) \\ &= q \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \\ &= 1 - q + 1 - p \\ &= 1 - q + q \\ &= 1 \end{aligned}$$

$i = k - 1$
linéarité de la somme, licite car puisque $p, q \in]0; 1[$, les séries $\sum_{i \geq 1} p^i$ et $\sum_{i \geq 1} q^i$ sont des séries géométriques convergentes
 $q = 1 - p, p = 1 - q$

Important !

Il est indispensable de justifier (ou à défaut mentionner) la convergence des séries en jeu lorsqu'on utilise la linéarité (pour décomposer) sur des sommes infinies.

4.c. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

- On a $X(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Ainsi :

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 2} |k \mathbb{P}([X = k])|$ est convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$ est convergente
car $\forall k \geq 2, k \mathbb{P}([X = k]) \geq 0$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N k \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^N k (qp^{k-1} + pq^{k-1}) \\ &= q \sum_{k=2}^N kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^N kq^{k-1} \\ &= q \left(\sum_{k=1}^N kp^{k-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{k=1}^N kq^{k-1} - 1 \right) \end{aligned}$$

- Or $p, q \in]0; 1[$, donc les séries $\sum_{k \geq 1} kp^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$ sont des séries géométriques convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$ est convergente.

Rédaction

On regarde $X(\Omega)$:
• Si $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance ; puis on se lance dans le calcul.
• Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors on met en place cette rédaction en 3 étapes qui doit être un réflexe.

Attention !

Si $x \in]-1; 1[$:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= q \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} - 1 \right) \\
 &= q \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) \quad \leftarrow q = 1-p, p = 1-q \\
 &= \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p \quad \leftarrow p + q = 1 \\
 &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1
 \end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

5. Loi de Y .

5.a. Pour tout $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$. On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

- Si $k = 2$:

$[X = 2] \cap [Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on a tiré deux boules dont une blanche

si, et seulement si, (on tire une blanche puis une noire) ou (on tire une noire puis une blanche)

D'où :

$$[X = 2] \cap [Y = 1] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) &= \mathbb{P}((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\
 &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \quad \leftarrow \text{incompatibilité de } B_1 \text{ et } N_1, \text{ donc des événements en jeu} \\
 &= 2pq \quad \leftarrow \text{tirages avec remise, donc mutuelle indépendance des événements en jeu}
 \end{aligned}$$

- Si $k \geq 3$:

$[X = k] \cap [Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on a tiré k boules dont une blanche

si, et seulement si, on a tiré une seule blanche et $k - 1$ noires, avec $k - 1 \geq 2$

si, et seulement si, les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule noire et le tirage k donne une boule blanche

D'où :

$$[X = k] \cap [Y = 1] = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

Par conséquent, par indépendance des événements $N_1, \dots, N_{k-1}, B_k$, on obtient :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1} p$$

Important !

Si une couleur est obtenue au moins 2 fois, alors c'est nécessairement par cette couleur que les tirages ont débuté !

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = \begin{cases} 2pq & \text{si } k = 2 \\ q^{k-1} p & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$.

5.b. En déduire que $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket}$ comme système complet d'événements, la

série $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = 1]) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \\
 &= \mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \quad \leftarrow \text{question précédente} \\
 &= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} p q^{k-1} \quad \leftarrow i = k - 1 \\
 &= 2pq + p \sum_{i=2}^{+\infty} q^i \\
 &= 2pq + p \left(\sum_{i=2}^{+\infty} q^i - 1 - q \right) \\
 &= 2pq + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 - q \right) \quad \leftarrow 1 - q = p
 \end{aligned}$$

Attention !

On fait attention en remplaçant : il y a deux expressions différentes de $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$, selon que $k = 2$ ou $k \geq 3$... C'est une erreur que l'on rencontre souvent ; on peut y remédier en concluant précisément et visiblement la question précédente.

$$\begin{aligned}
&= 2pq + 1 - p - pq \\
&= pq + 1 - p \\
&= pq + q \\
&= q(1 + p)
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) 1 - p = q$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.

5.c. Déterminer la loi de Y .

- Puisque l'évènement "n'obtenir que des boules noires" est quasi-impossible, on peut considérer que

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

- * On a déjà $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$.
- * Soit ensuite $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

$[Y = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n blanches à la fin du jeu

si, et seulement si, on obtient n blanches et une noire à la fin, car $n \geq 2$

si, et seulement si, les tirages 1 à n ont donné une blanche et le $(n + 1)$ -ième tirage a donné une noire

D'où :

$$[Y = n] = B_1 \cap \dots \cap B_n \cap N_{n+1}$$

Puis, par indépendance des évènements $B_1, \dots, B_n, N_{n+1}$ (tirages avec remise), on obtient :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = p^n q$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = 1]) = q(1 + p)$ et pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([Y = n]) = p^n q$.

♥ L'avis du chef ! ♥

Exercice un peu répétitif peut-être... Mais il faut bien cela pour ancrer les méthodes !

On admet que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}(1 - p + p^2)$.

6. Donner la loi de Z et son espérance.

En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange Y et Z ...

Par conséquent, Z a la même loi que celle de Y , en échangeant p et q .

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = 1]) = p(1 + q)$ et pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, $\mathbb{P}([Z = n]) = q^n p$.

7. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

Soit $\omega \in \Omega$. On sait déjà que :

$$Y(\omega) + Z(\omega) = X(\omega)$$

Distinguons ensuite deux cas :

- Les tirages se terminent par une boule blanche :
Dans ce cas, on a nécessairement $Y(\omega) = 1$, d'où :

$$(YZ)(\omega) = Z(\omega)$$

Et, d'après la remarque ci-dessus,

$$Z(\omega) = X(\omega) - 1$$

Ainsi :

$$(YZ)(\omega) = X(\omega) - 1$$

- Les tirages se terminent par une boule noire :
Dans ce cas, on a nécessairement $Z(\omega) = 1$, d'où :

$$(YZ)(\omega) = Y(\omega)$$

Et, d'après la remarque ci-dessus,

$$Y(\omega) = X(\omega) - 1$$

Ainsi :

$$(YZ)(\omega) = X(\omega) - 1$$

Dans les deux cas :

$$(YZ)(\omega) = X(\omega) - 1$$

Conclusion : on a établi

$$\forall \omega \in \Omega, (YZ)(\omega) = X(\omega) - 1$$

Autrement dit, les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

♣ **Méthode !**

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Pour démontrer que deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ sont égales, on démontre

$$\forall x \in E, f(x) = g(x)$$

C'est donc ce que l'on fait ici.

8. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{Cov}(Y, Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

✓ Y et Z admettent une espérance,

✓ d'après la question précédente, $YZ = X - 1$ et X admet une espérance, donc YZ admet une espérance.

Ainsi, par formule de Koenig-Huygens, $\text{Cov}(Y, Z)$ existe et :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y, Z) &= \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X - 1) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &= \mathbb{E}(X) - 1 - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\end{aligned}$$

} question précédente
} linéarité de l'espérance

Conclusion : $\text{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}(X) - 1 - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$.