

ÉNONCÉ

1. Question de cours. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) de couleurs toutes différentes. La moitié des boules est marquée du chiffre 0, les autres sont numérotées de 1 à n .

On extrait simultanément n boules dans cette urne obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule numérotée i se trouve dans la poignée, et 0 sinon.

2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Déterminer la loi de probabilité de X_i .
3. Déterminer la loi de X_0 .
4. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
5. On note S la variable aléatoire qui prend comme valeur la somme des valeurs obtenues sur chacune des boules de la poignée.
- 5.a. Exprimer S en fonction de $X_0, \dots, X_n$.
- 5.b. Démontrer :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}$$

- 5.c. Déterminer l'espérance et la variance de S .
6. On désigne par Z la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de boules numérotées 0 dans la poignée. Donner la loi de probabilité de Z puis son espérance.

CORRIGÉ

1. Question de cours. Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

QUESTION DE COURS 47

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) de couleurs toutes différentes. La moitié des boules est marquée du chiffre 0, les autres sont numérotées de 1 à n .

On extrait simultanément n boules dans cette urne obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si une boule numérotée i se trouve dans la poignée, et 0 sinon.

2. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Déterminer la loi de probabilité de X_i .

On sait déjà que $X_i(\Omega) \subset \{0; 1\}$.

Ensuite :

$[X_i = 1]$ est réalisé si, et seulement si, la boule numéro i est tirée

si, et seulement si, la boule numéro i fait partie des n boules tirées sur les $2n$ au total

Or, tirer n boules sur les $2n$ équivaut à scinder les $2n$ boules en 2 groupes de tailles identiques... La boule numéro i a alors une chance sur deux d'être dans l'un de ces deux groupes, par équiprobabilité des tirages. D'où :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \frac{1}{2}$$

Conclusion : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

OU ALORS...

Puisque les poignées sont équiprobables, on a :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \frac{\text{Card}([X_i = 1])}{\text{Card}(\Omega)}$$

Or :

- Ω est constituée de toutes les poignées possibles : il y en a $\binom{2n}{n}$.
- Tirer une poignée réalisant $[X_i = 1]$ équivaut :
 - * choisir la boule numéro i : 1 choix
 - * choisir ensuite $n - 1$ boules sur les $2n - 1$ restantes : $\binom{2n-1}{n-1}$ choix.

D'où :

$$\text{Card}([X_i = 1]) = \binom{2n-1}{n-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_i = 1]) &= \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de X_0 .

On sait déjà que $X_i(\Omega) \subset \{0; 1\}$.

Ensuite, par équiprobabilité des poignées :

$$\mathbb{P}([X_0 = 0]) = \frac{\text{Card}([X_0 = 0])}{\text{Card}(\Omega)}$$

Et seule la poignée constituée des boules numérotées 1, 2, ..., n réalise l'évènement $[X_0 = 0]$. D'où :

$$\mathbb{P}([X_0 = 0]) = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

Conclusion : X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

4. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$. Puisque X_i et X_j admettent un moment d'ordre 2, $\text{Cov}(X_i, X_j)$ existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \\ &= \mathbb{E}(X_i X_j) - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

↪ question 1.

Or, $X_i X_j(\Omega) \subset \{0; 1\}$, donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i X_j) &= \mathbb{P}([X_i X_j = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \\ &= \frac{\text{Card}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{\frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \\ &= \frac{n-1}{2(2n-1)}\end{aligned}$$

↪ $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0; 1\}$
↪ équiprobabilité des poignées
↪ raisonnement analogue à ce qui précède

En reprenant, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_i, X_j) &= \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2(n-1) - (2n-1)}{4(2n-1)} \\ &= \frac{-1}{4(2n-1)}\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{-1}{4(2n-1)}$.

5. On note S la variable aléatoire qui prend comme valeur la somme des valeurs obtenues sur chacune des boules de la poignée.

5.a. Exprimer S en fonction de $X_0, \dots, X_n$.

Conclusion : $S = \sum_{i=0}^n i X_i = \sum_{i=1}^n i X_i$.

5.b. Démontrer :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}$$

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ij \\ &= \sum_{j=2}^n \left(j \sum_{i=1}^{j-1} i \right) \\ &= \sum_{j=2}^n \left(j \frac{(j-1)j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j^2(j-1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 - j^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\ &= \frac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{24}\end{aligned}$$

↪ terme nul quand $j = 1$

Remarque

On peut également utiliser le théorème de transfert pour calculer $\mathbb{E}(X_i X_j)$... On obtiendrait alors immédiatement :

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$$

(les trois autres termes de la somme double étant nuls...)

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ij = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

5.c. Déterminer l'espérance et la variance de S .

- La variable aléatoire S admet une espérance, comme combinaison linéaire de n variables aléatoires admettant une espérance ; et, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{i=1}^n i \mathbb{E}(X_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(S) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

- La variable aléatoire S admet une variance, comme combinaison linéaire de n variables aléatoires admettant une variance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S) &= \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n i X_i, \sum_{j=1}^n j X_j \right) && \swarrow \text{linéarité à gauche et à droite de la covariance} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 \mathbb{V}(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} ij \text{Cov}(X_i, X_j) && \swarrow \text{symétrie de la covariance} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \text{Cov}(X_i, X_j) && \swarrow \text{question 3.} \\ &= \frac{1}{4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \frac{-1}{4(2n-1)} && \swarrow \text{question précédente} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{2(2n-1)} \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24} \\ &= \frac{2(2n-1)n(n+1)(2n+1) - n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{48(2n-1)} \\ &= \frac{n(n+1)(8n^2 - 2 - 3n^2 + n + 2)}{48(2n-1)} \\ &= \frac{n(n+1)(5n^2 + n)}{48(2n-1)} \\ &= \frac{n^2(n+1)(5n+1)}{48(2n-1)} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{V}(S) = \frac{n^2(n+1)(5n+1)}{48(2n-1)}.$$

6. On désigne par Z la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de boules numérotées 0 dans la poignée. Donner la loi de probabilité de Z puis son espérance.

- On a déjà $Z(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit ensuite $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Par équiprobabilité des poignées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z = k]) &= \frac{\text{Card}([Z = k])}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{\text{Card}([Z = k])}{\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

Or, tirer une poignée réalisant $[Z = k]$ équivaut à :

- * choisir k boules numérotées 0 parmi les n disponibles,
- * choisir $n - k$ boules avec un autre numéro parmi les n disponibles.

D'où :

$$\text{Card}([Z = k]) = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

Conclusion : $Z(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

Pour info...

Z suit une loi hypergéométrique (HP). En utilisant la formule de Vandermonde (HP), on peut vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k]) = 1..$

FORMULE DE VANDERMONDE...

Pour tous entiers naturels k, m, n tels que $k \leq m + n$:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} \binom{n}{i}$$

Donnons une démonstration de cette formule, qui n'est pas à connaître.

Soient $k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq m + n$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

Mais également, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{m+n} &= (1+x)^m (1+x)^n \\ &= \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \quad \leftarrow \text{formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{i=0}^m \left(\binom{m}{i} x^i \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} x^i \binom{n}{j} x^j \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^{i+j} \quad \leftarrow k = i + j \text{ (dans la somme de l'intérieur)} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{k=i}^{i+n} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^k \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^k$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0; m+n \rrbracket$, en identifiant le coefficient du terme en x^k , on obtient :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

- Pour l'espérance de Z , remarquons que $\sum_{i=1}^n X_i$ est le nombre de boules numérotées autres que 0 dans la poignée. Par conséquent :

$$Z = n - \sum_{i=1}^n X_i$$

Ainsi Z admet une espérance, comme combinaison linéaire de telles variables aléatoires, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E} \left(n - \sum_{i=1}^n X_i \right) \quad \leftarrow \text{linéarité de l'espérance} \\ &= n - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \quad \leftarrow \text{question 2.} \\ &= n - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$.

Pour s'entraîner...

On pourrait également obtenir $\mathbb{E}(Z)$ par le calcul, en utilisant la loi de $Z...$ mais ceci nécessiterait l'utilisation de la formule de Vandermonde. C'est toutefois un bon exercice à faire pour s'entraîner !