

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0; 1[$ et de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n . Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n - k$ balles rouges. L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus. On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon.

1. **1.a.** Reconnaître la loi de X . Donner $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k])$. Donner également $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleY(n,p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y .
3. **3.a.** Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0])$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0])$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3.b. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) = \frac{k}{n}$.
3.c. En déduire : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$.
3.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
4. **4.a.** Montrer que $\mathbb{E}(XY) = p(1 - p + np)$.
4.b. En déduire la covariance du couple (X, Y) .

CORRIGÉ

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0; 1[$ et de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n . Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n - k$ balles rouges.

L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus. On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon.

1. 1.a. Reconnaître la loi de X . Donner $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = k])$. Donner également $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- ✓ L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p .
- ✓ La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

Rappel...

Pas nécessaire que les épreuves de Bernoulli soient identiques ; du moment qu'elles sont indépendantes et que la probabilité du succès est toujours la même.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ et ainsi :

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} ; \mathbb{E}(X) = np ; \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

D'où :

$$np(1-p) = \mathbb{E}(X^2) - (np)^2$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = np(1-p + np)$.

2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleY(n,p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y .

```
1 def simuleY(n,p):
2     X=rd.binomial(n,p)
3     if rd.random()<X/n:
4         Y=1
5     else:
6         Y=0
7     return Y
```

3. 3.a. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0])$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0])$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

- Supposons l'évènement $[X = 0]$ réalisé. Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne 0 composée de 0 balle verte et n balles rouges. Par conséquent, on piochera nécessairement une balle rouge. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0]) = 1$$

- Supposons l'évènement $[X = n]$ réalisé. Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne n composée de n balles vertes et 0 balle rouge. Par conséquent, on piochera nécessairement une balle verte. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0]) = 0$$

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que X et Y sont indépendantes. Dans ce cas, on aurait :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0]) = \mathbb{P}([Y = 0]) ; \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0]) = \mathbb{P}([Y = 0])$$

Ce qui donnerait, d'après ce qui précède $1 = 0$. D'où l'absurdité.

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Rédaction

On s'imprègne de cette rédaction pour ce type de question. C'est très fréquent, presque systématique... Ne pas hésiter à reformuler ce que signifie la réalisation de l'évènement par lequel on conditionne.

3.b. Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) = \frac{k}{n}$.

Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé.

Dans ce cas, on pioche une balle dans l'urne k ; par conséquent, l'évènement $[Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche de façon équiprobable une des k balles vertes présentes parmi les n balles de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) = \frac{k}{n}$$

Conclusion : pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) = \frac{k}{n}$.

Important !

L'argument d'équiprobabilité du choix de la balle est nécessaire.

3.c. En déduire : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ comme système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
 $\hookrightarrow$ question précédente
 $\hookrightarrow X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

→ Réflexe !
On connaît les probas conditionnelles, on veut la probabilité de l'événement : FPT !

Remarque

L'énoncé rendrait les choses plus difficiles si la question était de montrer que $\mathbb{P}([Y = 1]) = p$. On serait alors tenté de remplacer l'expression de $\mathbb{P}([X = k])$ et donc de refaire le calcul de l'espérance d'une VA suivant la loi $\mathcal{B}(n; p)$.

3.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Par définition de Y , on a

$$Y(\Omega) = \{0; 1\}$$

Par conséquent, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([Y = 1])$. Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n} = p$$

$\hookrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et ainsi $\mathbb{E}(Y) = p$ et $\mathbb{V}(Y) = p(1 - p)$.

4. 4.a. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = p(1 - p + np)$.

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, $(XY)(\Omega)$ également et donc la variable aléatoire XY admet une espérance ; et par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} kj \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^1 kj \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1]) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 1]) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X^2) \\ &= p(1 - p + np) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
 $\hookrightarrow$ question 3.b.
 $\hookrightarrow$ théorème de transfert, car $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$
 $\hookrightarrow$ question 1.b.

Conclusion : $\mathbb{E}(XY) = p(1 - p + np)$.

4.b. En déduire la covariance du couple (X, Y) .

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la covariance du couple (X, Y) existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= p(1 - p + np) - np^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ questions précédente et 1.b.

Conclusion : $\text{Cov}(X, Y) = p(1 - p)$.

Rappel...

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y)$ existe. Un cas particulier fréquent : si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, alors X et Y ont des moments à tout ordre et donc $\text{Cov}(X, Y)$ existe.