

ÉNONCÉ

1. Préliminaires.

Soit $x \in]0; 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel non nul n , S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le n -ième succès ;
 - T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n -ième succès après le $(n-1)$ -ième succès.
- Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$; et on admet que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

1.a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .

1.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , la variable aléatoire S_n en fonction des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$.

1.c. Pour tout entier naturel non nul n , montrer que la variable aléatoire S_n admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

1.d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

1.e. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est p (p fixé, $p \in]0; 1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1 - p$.

- Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .
- Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur B .

2.a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2.b. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

2.c. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleXY(p)** renvoie une réalisation du couple (X, Y) .

2.d. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

2.e. Soit n un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e. :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

CORRIGÉ

1. Préliminaires.

Soit $x \in]0; 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel non nul n , S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le n -ième succès ;
- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n -ième succès après le $(n-1)$ -ième succès. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$; et on admet que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

1.a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✓ Après le tirage ayant permis d'obtenir le $(n-1)$ -ième succès, l'expérience consiste en une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès est de probabilité $1-x$.
- ✓ La variable aléatoire T_n prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : T_n suit la loi géométrique de paramètre $1-x$ et ainsi :

$$T_n(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([T_n = k]) = x^{k-1}(1-x)$$

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

1.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , la variable aléatoire S_n en fonction des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geq 2$:

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad T_k = S_k - S_{k-1}$$

D'où, en sommant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^n T_k = \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1})$$

Autrement, par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n T_k = S_n - S_1$$

Et comme $S_1 = T_1$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

- Si $n = 1$:

L'égalité établie est encore valable...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

1.c. Pour tout entier naturel non nul n , montrer que la variable aléatoire S_n admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, S_n est une somme de variables aléatoires admettant une espérance et une variance ; donc S_n admet également une espérance et une variance ; et :

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n T_k\right) \quad \leftarrow \text{linéarité de l'espérance}$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k) \quad \leftarrow \text{question 1.a.}$$

$$= \frac{n}{1-x}$$

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n T_k\right) \quad \leftarrow T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(T_k) \quad \leftarrow \text{question 1.a.}$$

$$= \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} ; \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}.$

1.d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

- Si $n = 1$:
On sait que $S_1 = T_1$ et T_1 suit la loi géométrique de paramètre $1-x$.
- Si $n \geq 2$:
 - * On a déjà :

$$S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket$$

- * Soit $k \in \llbracket n; +\infty \llbracket$.

$[S_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, le n -ième succès a lieu lors de la k -ième épreuve

si, et seulement si, on a obtenu $n-1$ succès sur les épreuves 1 à $k-1$ et un succès à l'épreuve k

Ainsi, en notant :

× X_{k-1} la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenu sur les épreuves 1 à $k-1$,

× E_k l'évènement "obtenir un échec à l'épreuve k ",

on a :

$$[S_n = k] = [X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E_k}$$

D'où :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E_k})$$

Or seules les épreuves 1 à $k-1$ entrent en jeu dans la réalisation de l'évènement $[X_{k-1} = n-1]$; donc, puisque les lancers sont indépendants, les évènements $[X_{k-1} = n-1]$ et $\overline{E_k}$ le sont aussi. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_n = k]) &= \mathbb{P}([X_{k-1} = n-1]) \mathbb{P}(\overline{E_k}) \\ &= \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{n-1} x^{k-n} \times (1-x) \\ &= \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} \end{aligned} \quad \leftarrow X_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1; 1-x) \text{ et } n-1 \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$$

On remarque alors que les deux cas se regroupent...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket ; \forall k \in \llbracket n; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n}$$

Remarque

Puisque la détermination de l'ensemble image ne fait pas l'objet de la question, on se contente de le donner sans le justifier.

★ Pour l'oral d'HEC ★

On peut justifier autrement ce résultat :

- les issues de $[S_n = k]$ sont toutes équiprobables
- chaque issue de $[S_n = k]$ est constituée de n succès et $k-n$ échecs ; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $(1-x)^n x^{k-n}$
- chaque issue de $[S_n = k]$ se termine par un succès ; pour le reste, il suffit de placer $n-1$ succès sur les $k-1$ résultats précédents : il y a $\binom{k-1}{n-1}$ telles possibilités.

1.e. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket$, on sait que la série $\sum_{k \geq n} \mathbb{P}([S_n = k])$ est convergente et de somme

égale à 1.

D'où, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} = 1$$

Autrement dit :

$$\frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = 1$$

D'où le résultat, puisque $x \neq 0$ et $1-x \neq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est p (p fixé, $p \in]0; 1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1 - p$.

- Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .
- Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur B .

2.a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Démontrons que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Procédons par double inclusion.

$\square \subset$ La variable aléatoire Y prend comme valeurs le nombre de PILE obtenus sur une succession de lancers : Y prend donc des valeurs entières positives. D'où :

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

$\square \supset$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in Y(\Omega)$. Autrement dit, montrons que $[Y = n] \neq \emptyset$.

Considérons l'issue définie par :

- * le joueur A obtient FACE des lancers 1 à $n - 1$, puis PILE au lancer n ;
- * le joueur B (qui lance alors n fois la pièce) obtient n PILE.

Cette issue réalise l'évènement $[Y = n]$... D'où : $n \in Y(\Omega)$ et ainsi :

$$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

⚠ Attention !
 ~~$Y(\Omega) = \llbracket 0; k \rrbracket$~~ : ça n'aurait aucun sens ! La variable aléatoire Y ne dépend d'aucun k ... Il ne faut pas confondre la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ (qui est la loi binomiale de paramètre k et p , on retrouve bien $\llbracket 0; k \rrbracket$ comme support de cette loi...) et la loi de Y .

2.b. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

- ✓ L'expérience, pour le joueur A , consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p .
- ✓ La variable aléatoire X prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, d'où :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = (1 - p)^{k-1} p$$

- * D'après la question précédente, on a déjà :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

- * Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé ; c'est-à-dire que le joueur A a effectué k lancers. Sous cette hypothèse :

- ✓ l'expérience, pour le joueur B , consiste en k répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p ;
- ✓ la variable aléatoire Y prend alors comme valeur le nombre de succès obtenus.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres k et p ; d'où :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \in \llbracket 0; k \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.c. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleXY(p)** renvoie une réalisation du couple (X, Y) .

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleXY(p):
4     X=rd.geometric(p)
5     Y=rd.binomial(X,p)
6     return (X,Y)
```

2.d. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0])$ est convergente et :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0])$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$

➡ Réflexe !
 On a la loi conditionnelle, on cherche $\mathbb{P}([Y = 0])$: FPT !

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} \\
&= p q \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p q \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n \\
&= p q \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p q}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

question 2.b.

$n = k - 1$

$p = 1 - q$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q}{1+q}$.

2.e. Soit n un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e. :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n])$ est convergente et :

➡ **Réflexe !**
On a la loi conditionnelle, on cherche la loi de Y : FPT !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1} \\
&= p^{n+1} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^{2k-n-1} \\
&= p^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{n} q^{2j-n-3} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{(n+1)-1} (q^2)^j \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{(q^2)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{q^{2n+2}}{p^{n+1}(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$

question 2.b. : $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$

$j = k + 1$

question 1.e., licite car $n+1 \in \mathbb{N}^*$ et $q^2 \in]0; 1[$

$p = 1 - q$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$.

Remarque
Et cette relation fournit le résultat de la question précédente lorsque l'on prend $n = 0$... C'est normal, car l'hypothèse ' $n > 0$ ' n'a pas servi ici.