

ÉNONCÉ

Soit $p \in]0; 1[$. Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant :

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Question de cours. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance :

- d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$;
- d'une variable aléatoire Y fonction affine de X , c'est-à-dire $Y = aX + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche et Y_n le nombre de marches franchies.

2.a. Justifier la loi suivie par la variable aléatoire X_n .

2.b. Exprimer Y_n en fonction de X_n puis en déduire l'espérance et la variance de Y_n .

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k . Déterminer les valeurs de p_1, p_2 puis établir une formule de récurrence reliant p_k et p_{k-1} pour tout $k \geq 2$.

4. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n -ième marche.

5.a. Écrire une fonction **Python** qui prend en entrée un entier n et la probabilité p et renvoie une simulation de la variable aléatoire Z_n .

5.b. Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Démontrer :

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([Z_n = k]) = p\mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1]) + (1-p)\mathbb{P}([Z_{n-2} = k-1])$$

En déduire :

$$\mathbb{E}(Z_n) = p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1$$

5.c. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - an$, avec a un réel. Déterminer la valeur du réel a de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. En déduire $\mathbb{E}(Z_n)$ puis un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Très bon exercice (adapté) sur une expérience très classique. Il serait également possible de s'intéresser au nombre de façons de franchir les n premières marches par exemple (suite de Fibonacci...).

Soit $p \in]0; 1[$. Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant :

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Question de cours. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance :

- d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$;
- d'une variable aléatoire Y fonction affine de X , c'est-à-dire $Y = aX + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Voir cours.

2. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche et Y_n le nombre de marches franchies.

2.a. Justifier la loi suivie par la variable aléatoire X_n .

- ✓ L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "sauter d'une seule marche" a pour probabilité p .
- ✓ La variable aléatoire X_n prend alors comme valeur le nombre de succès sur ces n répétitions.

Conclusion : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

2.b. Exprimer Y_n en fonction de X_n puis en déduire l'espérance et la variance de Y_n .

- Sur les n sauts observés, la grenouille a ainsi effectué X_n sauts d'une seule marche et donc $n - X_n$ sauts de deux marches. Par conséquent :

$$\begin{aligned} Y_n &= X_n \times 1 + (n - X_n) \times 2 \\ &= 2n - X_n \end{aligned}$$

- Puisque X_n admet une espérance et une variance, la variable aléatoire Y_n également (fonction affine de X_n) et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}(2n - X_n) \\ &= 2n - \mathbb{E}(X_n) \\ &= 2n - np \\ &= n(2 - p) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{linéarité de l'espérance}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{V}(2n - X_n) \\ &= (-1)^2 \mathbb{V}(X_n) \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k . Déterminer les valeurs de p_1, p_2 puis établir une formule de récurrence reliant p_k et p_{k-1} pour tout $k \geq 2$.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, M_k l'évènement "la grenouille passe par la marche k " (de sorte que $p_k = \mathbb{P}(M_k)$) ainsi que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, U_i l'évènement "la grenouille saute d'une marche au i -ème saut" et $D_i = \overline{U_i}$.

- On a immédiatement :

$$M_1 = U_1$$

D'où :

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathbb{P}(U_1) \\ &= p \end{aligned}$$

- L'évènement M_1 est réalisé si, et seulement si, la grenouille saute d'une seule marche aux premier et second sauts ou elle saute de deux marches au premier saut.

Ainsi :

$$M_2 = (U_1 \cap U_2) \cup D_1$$

D'où :

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}((U_1 \cap U_2) \cup D_1) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \cap U_2) + \mathbb{P}(D_1) \\ &= p^2 + 1 - p \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} D_1 \text{ et } U_1 \text{ sont incompatibles, donc } D_1 \text{ et } U_1 \cap U_2 \text{ également} \\ \text{indépendance des sauts} \end{array}$$

- Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Raisonnons sur $\overline{M_k}$...

$\overline{M_k}$ est réalisé si, et seulement si, la grenouille ne pas par la marche k
si, et seulement si, la grenouille passe par la marche $k - 1$ et qu'elle effectue ensuite un saut de 2 marches

Remarque

On pourrait également utiliser la FPT avec (U_1, D_1) comme SCE... On utiliserait le fait que $D_1 \cap M_2 = D_1$ (car $D_1 \subset M_2$) et le fait que $\mathbb{P}_{U_1}(M_2) = \mathbb{P}(U_2)$...

Il existe donc un entier $i_0 \in \mathbb{N}^*$, que l'on considère ensuite, tel que

$$\overline{M}_k = M_{k-1} \cap D_{i_0}$$

D'où :

$$\begin{aligned} p_k &= 1 - \mathbb{P}(\overline{M}_k) \\ &= 1 - \mathbb{P}(M_{k-1} \cap D_{i_0}) \\ &= 1 - (1-p)p_{k-1} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{indépendance des sauts}$$

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, p_k = 1 - (1-p)p_{k-1}$.

Remarque

On pourrait également établir une relation de récurrence d'ordre 2 sur la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On trouverait, pour tout $k \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$:

$$p_k = pp_{k-1} + (1-p)p_{k-2}$$

4. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, on voit que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique...

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x &= 1 - (1-p)x \iff x(2-p) = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2-p} \end{aligned} \quad \leftarrow p \in]0; 1[, \text{ donc } 2-p \neq 0$$

Notons $\alpha = \frac{1}{2-p}$.

- On a ainsi :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} = (p-1)p_k + 1 \\ \alpha = (p-1)\alpha + 1 \end{cases}$$

D'où, en soustrayant la ligne 2 à la ligne 1 :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} - \alpha = (p-1)(p_k - \alpha)$$

Dès lors, la suite $(p_k - \alpha)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $(p-1)$ et de premier terme $p_1 - \alpha$ avec :

$$\begin{aligned} p_1 - \alpha &= p_1 - \frac{1}{2-p} \\ &= \frac{2p - p^2 - 1}{2-p} \\ &= -\frac{(p-1)^2}{2-p} \end{aligned}$$

Par conséquent : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} p_k - \alpha &= -\frac{(p-1)^2}{2-p} (p-1)^{k-1} \\ &= -\frac{(p-1)^{k+1}}{2-p} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \frac{1 - (p-1)^{k+1}}{2-p}$.

♣ Méthode !

Si $u_{n+1} = au_n + b$ ($a \neq 1$) :

- résoudre $x = ax + b$
- poser $v_n = u_n - \alpha$, où α est la solution de $x = ax + b$
- montrer que (v_n) est géométrique (de raison a)
- donner le terme général de (v_n) et en déduire celui de (u_n) .

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n -ième marche.

5.a. Écrire une fonction **Python** qui prend en entrée un entier n et la probabilité p et renvoie une simulation de la variable aléatoire Z_n .

```
1 def simule_Z(n,p):
2     marche=0
3     saut=0
4     while marche<n:
5         saut=saut+1
6         if rd.random()<p:
7             marche=marche+1
8         else :
9             marche=marche+2
10    return saut
```

5.b. Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Démontrer :

$$\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([Z_n = k]) = p\mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1]) + (1-p)\mathbb{P}([Z_{n-2} = k-1])$$

En déduire :

$$\mathbb{E}(Z_n) = p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1$$

- Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec (U_1, D_1) comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_n = k]) &= \mathbb{P}(U_1 \cap [Z_n = k]) + \mathbb{P}(D_1 \cap [Z_n = k]) \\ &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}([Z_n = k]) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}([Z_n = k]) \quad \leftarrow \mathbb{P}(U_1) \text{ et } \mathbb{P}(D_1) \text{ sont non nulles} \\ &= p\mathbb{P}_{U_1}([Z_n = k]) + (1-p)\mathbb{P}_{D_1}([Z_n = k]) \end{aligned}$$

Or :

- * Supposons U_1 réalisé. Autrement dit, la grenouille a effectué un saut d'une marche pour débiter.

Dans ce cas $[Z_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, la grenouille atteint ou dépasse les $n-1$ marches en $k-1$ sauts restants

si, et seulement si, $[Z_{n-1} = k-1]$ est réalisé

D'où :

$$\mathbb{P}_{U_1}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1])$$

- * Supposons D_1 réalisé. Autrement dit, la grenouille a effectué un saut de deux marche pour débiter.

Dans ce cas $[Z_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, la grenouille atteint ou dépasse les $n-2$ marches en $k-1$ sauts restants

si, et seulement si, $[Z_{n-2} = k-1]$ est réalisé

D'où :

$$\mathbb{P}_{D_1}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z_{n-2} = k-1])$$

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \mathbb{P}([Z_n = k]) = p\mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1]) + (1-p)\mathbb{P}([Z_{n-2} = k-1])$.

- On sait que $Z_n(\Omega) \subset \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi $Z_n(\Omega)$ est fini, donc Z_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}([Z_n = k]) \quad \leftarrow \text{point précédent, licite pour tout } k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \\ &= \sum_{k=1}^n k \left(p\mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1]) + (1-p)\mathbb{P}([Z_{n-2} = k-1]) \right) \quad \leftarrow i = k-1 \text{ dans les deux sommes} \\ &= p \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\mathbb{P}([Z_{n-1} = i]) + (1-p) \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\mathbb{P}([Z_{n-2} = i]) \\ &= p \sum_{i=0}^{n-1} i\mathbb{P}([Z_{n-1} = i]) + p \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Z_{n-1} = i]) \\ &\quad + (1-p) \sum_{i=0}^{n-1} i\mathbb{P}([Z_{n-2} = i]) + (1-p) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Z_{n-2} = i]) \quad \leftarrow Z_{n-1}(\Omega) \subset \llbracket 0; n-1 \rrbracket \text{ et } Z_{n-2}(\Omega) \subset \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ &= p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + p + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1 - p \\ &= p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Z_n) = p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1$.

5.c. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - an$, avec a un réel. Déterminer la valeur du réel a de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. En déduire $\mathbb{E}(Z_n)$ puis un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \mathbb{E}(Z_n) - an \\ &= p\mathbb{E}(Z_{n-1}) + (1-p)\mathbb{E}(Z_{n-2}) + 1 - an \quad \leftarrow \text{question précédente, licite car } n \geq 3 \\ &= pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + ap(n-1) + a(1-p)(n-2) + 1 - an \quad \leftarrow \mathbb{E}(Z_{n-1}) = u_{n-1} + a(n-1) \text{ et } \mathbb{E}(Z_{n-2}) = u_{n-2} + a(n-2) \\ &= pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + ap - 2a + 1 \\ &= pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + a(p-2) + 1 \end{aligned}$$

On pose donc $a = \frac{1}{2-p}$ de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec $x^2 - px - (1-p) = 0$ comme équation caractéristique, dont les solutions sont 1 et $p-1$.
Par conséquent, il existe deux uniques réels α, β , que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \alpha + \beta(p-1)^{n-1}$$

Ensuite :

- * Z_1 suit la loi certaine égale à 1, donc $\mathbb{E}(Z_1) = 1$ et ainsi $u_1 = 1 - \frac{1}{2-p} = \frac{1-p}{2-p}$.
- * $Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$, on a $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \mathbb{P}(D_1) = 1-p$, d'où $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = p$ et donc $\mathbb{E}(Z_2) = 1+p$ ce qui donne $u_2 = 1+p - \frac{2}{2-p} = \frac{p-p^2}{2-p}$.

On obtient, après résolution de système :

$$\alpha = \frac{1-p}{(2-p)^2} ; \quad \beta = \frac{(p-1)^2}{(2-p)^2}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1-p + (p-1)^{n+1}}{(2-p)^2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1-p + (p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} + \frac{n}{2-p}.$$

Remarque

Il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement $\mathbb{E}(Z_n)$ pour en déterminer un équivalent.
En effet, à partir de cette étape, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \dots$ Donc $\mathbb{E}(Z_n) = \frac{n}{2-p} + o_{n \rightarrow +\infty}(n)$, ce qui donne $\mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2-p}$.

Vérification

Rapidement, on vérifie que le résultat est correct quand $n = 1 \dots$

- Puisque $(1-p) \in]0; 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-p + (p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} = \frac{1-p}{(2-p)^2}$, et donc

$$\frac{1-p + (p-1)^{n+1}}{(2-p)^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2-p} \right)$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2-p}.$$

Vérification

En prenant les cas limites $p = 0$ et $p = 1$, on trouve un résultat cohérent puisque, si $p = 1$, alors la grenouille saute une seule marche à chaque fois (et donc $\mathbb{E}(Z_n) = n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$) et si $p = 0$, alors elle saute de 2 en 2 et donc $\mathbb{E}(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2} \dots$