EDHEC 2020 E
Problème

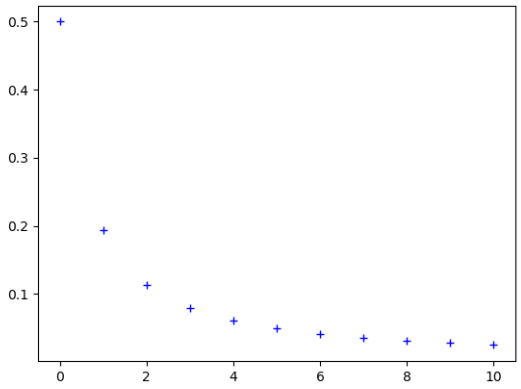
Énoncé

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. 3.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   3.b. En déduire I_2.
4. 4.a. À l'aide de la relation établie à la question 3.a., écrire une fonction **Python** d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   4.b. On considère le programme suivant :

```
Labs=.................
Lord=.................
plt.plot(Labs,Lord,'b+')
plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont représentés.



   4.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 4.a..

```
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?

5. 5.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   5.b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
6. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
7. 7.a. Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n$ en fonction de n.
   7.b. En déduire J_1.
8. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.
9. 9.a. Utiliser les résultats des questions 5. et 6. pour justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   9.b. En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   9.c. Utiliser le résultat de la question 6. pour déterminer un équivalent de J_n de la forme $\dfrac{1}{\alpha n}$ avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

10.a. Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10.b. Démontrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse de la question précédente, de démontrer que la série de terme général est convergente.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

11.a. Justifier que pour tout entier naturel non nul k, on a

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$$

11.b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

11.c. Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

12. Des trois résultats ci-dessous, expliquer lequel nous venons de démontrer :

$$(a)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)\ ;\ (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)\ ;\ (c)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Corrigé

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont continues sur le segment $[0;1]$, comme quotient de fonctions continues sur $[0;1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n existent.

♣ Méthode !

Deux cas sont possibles pour justifier l'existence d'une intégrale :
- intégrande continue sur le **segment** (on veut voir le mot "segment" dans ce cas) d'intégration : OK (cours de 1A)
- problème de définition ou continuité de l'intégrande sur au moins une des bornes de l'intégrale : intégrales impropres (cours de 2A) dont il faudra établir la convergence.

2. Calculer I_0 et I_1.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \qquad \text{(point précédent)} \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Remarque

Plutôt que d'utiliser cette astuce, on aurait aussi pu effectuer le changement de variable $t = 1+x$; ou même procéder par IPP.

3. 3.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

3.b. En déduire I_2.

D'après le résultat précédent, on obtient $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$. Puis on utilise les résultats de la question 2....

Conclusion : $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln(2)$.

4. 4.a. À l'aide de la relation établie à la question 3.a., écrire une fonction **Python** d'en-tête **`def I(n):`** qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposons trois versions.

```
1 def I(n):
2     L=[0 for k in range(0,n+1)]
3     L[0]=1/2
4     L[1]=np.log(2)-1/2
5     for k in range(2,n+1): #k=rg du terme calculé
6         L[k]=-2*L[k-1]-L[k-2]+1/(k-1)
7     return L[n]
8
9 def I_bis(n):
```

✘ Attention !

En ligne 9, `k` désigne le rang du terme calculé... Et la relation de récurrence de la question 3.a. fournit :

$\forall k \geqslant 2,\ I_k = 2I_{k-1} - I_{k-2} + \dfrac{1}{k-1}$

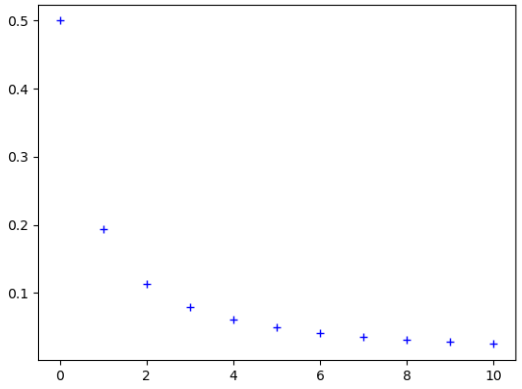
```
    L=[1/2,np.log(2)-1/2]
    for k in range(2,n+1): #k=rg du terme calculé
        L.append(-2*L[k-1]-L[k-2]+1/(k-1))
    return L[n]

def I_ter(n):
    if n==0:
        return 1/2
    else:
        u,v=1/2,np.log(2)-1/2
        for k in range(2,n+1):
            u,v=v,-2*v-u+1/(k-1)
        return v
```

4.b. On considère le programme suivant :

```
Labs=.................
Lord=.................
plt.plot(Labs,Lord,'b+')
plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont représentés.



L1 : Labs=range(0,11)
L2 : Lord=[I(n) for n in Labs]

4.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 4.a..

```
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?
Le programme permet d'obtenir le premier rang à partir duquel u_n devient inférieur ou égale à p ; par conséquent, le programme s'arrête si I_n devient inférieur ou égal à p à un certain moment...

Conclusion : pour s'assurer que la boucle **while** s'arrête pour chaque valeur strictement positive de p, il faudrait démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. 5.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

- On a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ \frac{x^n}{(1+x)^2} \geqslant 0$$

D'où, par croissance de l'intégrale (licite car $0 \leqslant 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$$

- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3.a. :

$$I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} - 2I_{n+1}$$

Or, d'après le point précédent, $I_{n+1} \geqslant 0$ et $I_{n+2} \geqslant 0$. D'où :

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Ou alors, à la main...

- Soit $x \in [0;1]$. On a :
$$1 + x \geqslant 1$$
D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:
$$(1+x)^2 \geqslant 1$$
Et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:
$$\frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1$$
Puis, du fait que $x^n \geqslant 0$:
$$\frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$
Or, $x^n \geqslant 0$ et $(1+x)^2 > 0$, d'où :
$$0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$
- On a ainsi établi :
$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$
D'où, en intégrant sur $[0;1]$, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$; et par croissance de l'intégrale (avec $0 \leqslant 1$) :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx$$
Or :
$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Réflexe !
Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande... et $\dfrac{1}{n+1}$ nous fait penser à $\int_0^1 x^n dx$. Cela nous guide donc sur la façon d'encadrer l'intégrande : il faut garder x^n.

Remarque
Je pense qu'à l'écrit, il n'est pas nécessaire de détailler le calcul de cette intégrale.

5.b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Important !
Le théorème d'encadrement fournit l'existence et la valeur de la limite.
Inutile donc d'étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour utiliser le théorème de convergence monotone.

6. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$; $J_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$.

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto x^n \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{1+x} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{array}\right.$

✓ Rigueur !
Ne pas oublier la seule hypothèse pour l'IPP : les fonctions doivent être de classe $\mathscr{C}^1$ sur le **segment** d'intégration.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[x^n \times \frac{-1}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \times \frac{-1}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= nJ_{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

7. **7.a.** Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n$ en fonction de n.

- $$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &= \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} + J_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n = \dfrac{1}{n+1}$.

7.b. En déduire J_1.

D'après la question précédente $J_1 + J_0 = 1$. Or $J_0 = \ln(2)$.

Conclusion : $J_1 = 1 - \ln(2)$.

8. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} (-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) &= (-1)^1 \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1}\right) \\ &= -(\ln(2) - 1) \\ &= 1 - \ln(2) \\ &= J_1 \end{aligned}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et montrons que $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

On a, d'après la question **7.a.** :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \\ &= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

$(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in N^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Que faire si on manque d'inspiration pour l'hérédité ?

Plusieurs possibilités dans ce cas :

1# *Distinguer les cas n pair et n impair (ce n'est pas le plus rapide...).*

2# *Partir du membre de droite.*
On a :

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)-\frac{(-1)^{2n+1}}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)-\frac{-1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

On retrouve alors la 3ème ligne du calcul effectué précédemment.

3# *Faire apparaître ce que l'on veut !*
On a :

$$\begin{aligned}J_{n+1} &= -J_n+\frac{1}{n+1}\\ &= -(-1)^n\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{1}{n+1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{(-1)^{2n+1}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)+\frac{-1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\\ &= (-1)^{n+1}\left(\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\end{aligned}$$

9. 9.a. Utiliser les résultats des questions 5. et 6. pour justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

De la question 7., on déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ J_n=\frac{I_{n+1}+\frac{1}{2}}{n+1}$$

Or d'après la question 6. :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Ainsi, par opération, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

Conclusion : la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque

On peut également justifier de même que $\lim_{n\to+\infty} J_{n-1}=0$, puis conclure.

9.b. En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

D'après la question précédente et par continuité de la fonction valeur absolue en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} |J_n| = 0$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$J_n=\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Conclusion : la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

9.c. Utiliser le résultat de la question 6. pour déterminer un équivalent de J_n de la forme $\frac{1}{\alpha n}$ avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

On a, d'après la question 6., pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} nJ_n &= \frac{n(I_{n+1} + \frac{1}{2})}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Or :

- $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

D'où, par opération : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$$

Conclusion : $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

10. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

10.a. Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n u_n$$

Or, d'après la question précédente :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$.

Allons un peu plus loin...

L'énoncé pourrait demander d'aller un peu plus loin en demandant un développement asymptotique de $\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
Par exemple, il pourrait être demandé :

Déterminer deux réels a et b tels que $\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = a + b\frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On sait que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$$

Donc :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} &= \ln(2) - \frac{(-1)^n}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right) \\ &= \ln(2) - \frac{(-1)^n}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $a = \ln(2)$ et $b = \frac{-1}{2}$.

Rappel...
$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \iff \lim_{x\to a} f(x) = 0$
Mais l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$ est fausse si la limite est autre que 0...

Réflexe !
On revient à la définition : trouvons α tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{\frac{1}{n}} = \alpha$.

Remarque
$J_n = (-1)^n u_n$, donc $u_n = \frac{J_n}{(-1)^n} = (-1)^n$.

Remarque
En raisonnant par double implication (ou même par équivalences, en utilisant la valeur absolue...), on démontre :
$v_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)$
$\iff v_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

10.b. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

- D'après la question **9.b.**, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente ; donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{-1}{2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ également.

> **Conclusion :** la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

- Certes $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n}$ converge... Mais les séries ne sont pas à termes positifs ! Impossible donc d'utiliser les critères.
  Et on peut aussi dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas absolument ; ce qui ne permet pas de conclure sur la question posée.

> **Conclusion :** on ne peut pas conclure sur la nature de la série de terme général u_n.

11. On se propose, malgré l'impasse de la question précédente, de démontrer que la série de terme général est convergente.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

11.a. Justifier que pour tout entier naturel non nul k, on a

$$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k &= (k+1)(-1)^{k+1}J_{k+1} - k(-1)^k J_k + (-1)^k \\ &= (-1)^k\big((k+1)J_{k+1} - kJ_k + 1\big) \\ &= (-1)^k\big(1 - (k+1)J_k - kJ_k + 1\big) \qquad \text{↙ question 7.a.} \\ &= (-1)^k J_k \\ &= u_k\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

> **Remarque**
> Évidemment, on pouvait utiliser uniquement
> $$u_k = \ln(2) - \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

11.b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$$

D'où, en sommant sur $[\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\big((k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\big((k+1)u_{k+1} - ku_k\big) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \qquad \text{↙ télescopage et } -1 \neq 1 \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + (-1)\frac{1-(1)^n}{1-(-1)} \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big)\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \dfrac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big)$.

11.c. Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

- ✱ D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}S_{2n} &= (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\big(1-(-1)^{2n}\big) \\ &= (2n+1)u_{2n+1} - \ln(2) + 1\end{aligned}$$

Or :

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$

✓ $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^k}{2k}$

D'où :

$$u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2(2n+1)}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = \frac{-1}{2}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

∗ De la même façon, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - \ln(2)$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

- Puisque les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, par théorème de recouvrement, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers cette limite.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$.

12. Des trois résultats ci-dessous, expliquer lequel nous venons de démontrer :

$$(a)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)\ ;\quad (b)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)\ ;\quad (c)\ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_k &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \end{aligned}$$

↙ question 9.b.

Conclusion : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=k+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$: proposition (c).

☞ Pour info...

On dit que u_k est le reste d'ordre k de la série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{(-1^{j-1})}{j}$. La notion de reste de série convergente revient régulièrement aux écrits et oraux des concours. On s'assurera de savoir démontrer en deux lignes que le reste d'une série convergente tend toujours vers 0 (immédiat en utilisant la 2ème ligne ici).