EDHEC 2022 E
Exercice 3

Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.
3. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   - 4.a. Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. *On note γ (se prononce gamma) sa limite.*
   - 4.b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que $\gamma \in [0;1]$.
   - 4.c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. 5.a. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

   $$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$$

   puis démontrer :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

   - 5.b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   - 6.a. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.
   - 6.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - 6.c. Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.
7. 7.a. En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}.
   - 7.b. Déterminer $T_n - S_n$ puis compléter la fonction **Python** ci-dessous de sorte que l'exécution de `gamma()` renvoie une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
def gamma(p):
    n=1
    s=1-np.log(2)
    while ...
        n=...
        s=s+...
    return s
```

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.

La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ (car $n > 0$). Par conséquent, f_n est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$:

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$$

D'où :

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f	0	↗	$\dfrac{1}{n+1}$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le tableau de la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'où, puisque $n > 0$:

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant \frac{x}{n(x+n)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, en intégrant sur $[0;1]$, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$; et par croissance de l'intégrale (avec $0 \leqslant 1$) :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}dx$$

Autrement dit :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

➠Réflexe !
L'encadrement d'une intégrale vient toujours d'un encadrement de l'intégrande... Et avant de se lancer dans l'inconnu, on regarde sur les questions précédentes peuvent nous aider !

3. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

✓ D'après la question précédente et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

✓ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

Remarque
Sinon, on garde l'encadrement précédent et on justifie à côté la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ par critère.

✘ Attention !
ON NE SOMME PAS ! Le critère consiste à comparer les termes généraux.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

4.a. Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. *On note γ (se prononce gamma) sa limite.*

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, qui est une série convergente.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4.b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que $\gamma \in [0;1]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2. en sommant sur $[\![0;N]\!]$:

$$0 \leqslant S_N \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \qquad \text{↙ télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S_N \leqslant 1 - \frac{1}{N+1}$$

D'où le résultat par passage à la limite (toutes existent).

Conclusion : $\gamma \in [0;1]$.

4.c. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geqslant 0 \qquad \text{↙ question 2.}\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. 5.a. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$$

puis démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

♥ Astuce du chef ♥
En fait, on l'a fait dans le cas où $k = 1$ à la question 1.... Et comme les réels a et b sont indépendants de k (d'après la formulation de la question)... Vous voyez où je veux en venir...

- On remarque que : $\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$.

Conclusion : $a = 1$ et $b = -1$ et : $\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,dx \qquad \text{↙ question précédente et linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{k} - \Big[\ln(|x+k|)\Big]_0^1\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

5.b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k && \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) && \text{télescopage} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

6.a. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= S_n + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \gamma$,
- par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$.

Conclusion : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

6.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $[n; n+1]$ (licite car $[n; n+1] \subset \mathbb{R}^{+*}$) :

$$\forall x \in [n; n+1], \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n+1 \geqslant n$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{n+1-1}{n+1} \leqslant \left[\ln(|x|) \right]_n^{n+1} \leqslant \frac{n+1-1}{n}$$

D'où :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.

Remarque

Il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant l'IAF appliquée à la fonction ln sur le segment $[n; n+1]$...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

↘ télescopage

↘ résultat précédent

Conclusion : la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6.c. Donner alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.

- Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, elle est minorée par γ.
- De même, d'après la question **4.**, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ, donc elle est majorée par γ.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \gamma \leqslant T_n$.

☞ Rappels...
- Une suite croissante qui converge vers ℓ est majorée par ℓ.
- Une suite décroissante qui converge vers ℓ est minorée par ℓ.

7. **7.a.** En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}.

Lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}, l'intervalle $[S_n; T_n]$ est fournit un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

Conclusion : lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}, S_n fournit une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

★Subtil...★
En fait, soit S_n soit T_n est alors l'arrondi de γ à 10^{-4} près. Mais en principe, on ne parle pas d'arrondi, seulement de valeur approchée : c'est plus simple !

7.b. Déterminer $T_n - S_n$ puis compléter la fonction `Python` ci-dessous de sorte que l'exécution de `gamma()` renvoie une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
def gamma(p):
    n=1
    s=1-np.log(2)
    while ...
        n=...
        s=s+...
    return s
```

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

- Ensuite, on a pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= S_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \end{aligned}$$

↘ question **5.a.**

D'où le programme complet :

☞ Rappel...
À l'écrit, inutile de réécrire le programme en entier : seules les lignes manquantes suffisent.

```
def gamma(p):
    n=1
    s=1-np.log(2)
    while np.log(1+1/n)>10**(-3):
        n=n+1
        s=s+1/n-np.log(n+1)+np.log(n)
    return s
```

Ou alors...

L'énoncé aurait pu guider autrement en utilisant la majoration obtenue en question **6.b.**. En effet, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n - S_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Il suffit alors que $\frac{1}{n}$ soit inférieur ou égal à 10^{-3} pour que S_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.
Ainsi, S_{1000} convient...