Oral HEC 2012 E

Énoncé

1. Question de cours. Critères de convergence sur les intégrales impropres.

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$.

2. Démontrer que l'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $D =]-\infty; 1[$.
3. Étudier les variations de f sur D.
4. 4.a. Établir, pour tout $x \in D$, l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.
   4.b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
5. 5.a. Calculer $f(0)$.
   5.b. Établir, pour tout réel $x < 0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
   5.c. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.
6. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Corrigé

1. Question de cours. Critères de convergence sur les intégrales impropres.
QUESTION DE COURS 34.

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$.

2. Démontrer que l'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $D =]-\infty; 1[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons que $f(x)$ existe si, et seulement si, $x \in]-\infty; 1[$.
On sait déjà que $f(x)$ existe si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}\sqrt{1+t}\,dt$ est convergente.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}\sqrt{1+t}$ est continue sur $]0; 1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0; 1]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$ est éventuellement impropre en 0 seulement.
- Ensuite :
  - ✓ $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, donc
  $$\frac{1}{t^x}\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$$
  - ✓ $\forall t \in]0; 1]$, $\dfrac{1}{t^x}\sqrt{1+t} \geqslant 0$; $\dfrac{1}{t^x} \geqslant 0$

  Donc, par critère de comparaison (par équivalences) sur les intégrales à intégrandes positives, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}\sqrt{1+t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}\,dt$ ont même nature.
  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}\,dt$ est une intégrale de Riemann qui converge si, et seulement si, $x < 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^x}\sqrt{1+t}\,dt$ est convergente si, et seulement si, $x < 1$.
Autrement dit, l'ensemble de définition de la fonction f est $]-\infty; 1[$.

Sur les ensembles de définition des fonctions...

1# Trouver l'ensemble de définition d'une fonction f, c'est déterminer tous les réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
On rédige souvent ainsi :
"Notons $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
On a :
$$x \in \mathscr{D}_f \iff (\text{“}f(x) \text{ existe”})$$
$$\iff \ldots$$
D'où $\mathscr{D}_f = \ldots$."

2# **Attention !**
"Démontrer que la fonction f est définie sur $]-\infty; 1[$." $\neq$ "Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]-\infty; 1[$."
En effet, la première formulation demande seulement d'établir que si $x < 1$, alors $f(x)$ existe.
La seconde formulation demande de démontrer que $f(x)$ existe si, et seulement si, $x < 1$. Autrement dit, la première formulation ne fait que demander d'établir l'inclusion $]-\infty; 1[\subset \mathscr{D}_f$ alors que la seconde demande l'égalité.

3. Étudier les variations de f sur D.
Soient $x, y \in D$. On a :

$x \leqslant y \implies -x \geqslant -y$
$\implies \forall t \in]0; 1]$, $-x\ln(t) \leqslant -y\ln(t)$ ↙ $\forall t \in]0; 1]$, $\ln(t) < 0$
$\implies \forall t \in]0; 1]$, $e^{-x\ln(t)} \leqslant e^{-y\ln(t)}$ ↙ croissance de exp sur $\mathbb{R}$
$\implies \forall t \in]0; 1]$, $t^{-x}\sqrt{1+t} \leqslant t^{-y}\sqrt{1+t}$ ↙ $\forall t \in]0; 1]$, $\sqrt{1+t} \geqslant 0$
$\implies f(x) \leqslant f(y)$ ↙ en intégrant sur $]0; 1]$, licite car les deux intégrales convergent ; et croissance de l'intégrale, licite car $0 \leqslant 1$

Conclusion : la fonction f est croissante sur D.

4. 4.a. Établir, pour tout $x \in D$, l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.
Soit $x \in D$. On a :
$$\forall t \in]0; 1], \quad 1 \leqslant \sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}$$
D'où, puisque pour tout $t > 0$, $t^{-x} > 0$:
$$\forall t \in]0; 1], \quad t^{-x} \leqslant t^{-x}\sqrt{1+t} \leqslant t^{-x}\sqrt{2}$$

♣ Méthode !
Il faut démontrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$ est convergente si, et seulement si, $x \in D$. Pour cela, deux possibilités :
• Mettre en place un critère d'équivalences qui permet bien d'avoir un "si, et seulement si" ;
• démontrer que si $x \in D$, alors l'intégrale CV et si $x \notin D$, alors l'intégrale DV.

★Subtil...★
Dans le cas où α n'est pas rationnel, la définition donnée à t^α est :
$$t^\alpha = \exp(\alpha \ln(t))$$
Qui n'existe donc pas quand $t = 0$, mais qui tend vers 0 quand $t \to 0$.
L'intégrale est donc faussement impropre en 0 lorsque $x < 0$. Mais cela ne change pas que la mise en place du critère règle tous les cas d'un coup.

♥ Conseil du chef ♥
On repasse à l'écriture avec exp et ln pour éviter de se tromper sur le sens des inégalités...
Attention en revanche, il ne s'agit pas d'appliquer une quelconque fonction puissance car l'exposant n'est pas le même des deux côtés.

✘ Attention !
Pas besoin de $\iff$ dans la définition de fonction croissante/décroissante (et intégrer ne conserve de toute façon pas les équivalences).

Puis, en intégrant sur $]0;1]$, licite car les intégrales en jeu sont des intégrales de Riemann convergentes (car $x<1$) et par croissance de l'intégrale (avec $0 \leqslant 1$) :

$$\int_0^1 t^{-x}dt \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{2}\int_0^1 t^{-x}dt$$

Or, puisque $-x \neq -1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{-x}dt &= \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_{t\to 0}^1 \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^{-x+1}}{-x+1} - \frac{1}{-x+1} \qquad \text{↳ } x<1, \text{ donc } -x+1 = 1-x > 0 \text{ donc } \lim_{t\to 0} t^{-x+1} = 0 \\ &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{-x}dt &= \frac{1}{1-x} \qquad \text{↳ } x<1 \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $x \in D$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$.

4.b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

- ✓ D'après la question précédente :

$$\forall x \in]-\infty;1[,\ \frac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{1-x}$$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{1-x} = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

- ✓ D'après la question précédente :

$$\forall x \in]-\infty;1[,\ f(x) \geqslant \frac{1}{1-x}$$

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{1}{1-x} = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

5. **5.a.** Calculer $f(0)$.

$$\begin{aligned}f(0) &= \int_0^1 \sqrt{1+t}dt \\ &= \int_0^1 (1+t)^{\frac{1}{2}}dt \\ &= \left[\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1) \\ &= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

5.b. Établir, pour tout réel $x<0$, une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

Soit $x<0$.

Soit $A \in]0;1]$. Effectuons une intégration par parties dans $\int_A^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$. Posons : $\left|\begin{array}{l} u : t \longmapsto t^{-x} \\ v : t \longmapsto \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[A;1]$ et pour tout $t \in [A;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(t) = -xt^{-x-1} \\ v'(t) = \sqrt{1+t}\end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_A^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}t^{-x}\right]_A^1 - \frac{-2x}{3}\int_A^1 t^{-x-1}(1+t)^{\frac{3}{2}}dt$$

✍ Rédaction

Cette rédaction n'est autorisée que si la convergence de l'intégrale en jeu a déjà été établie.

☞ Rappel...

$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est une primitive de $u'u^\alpha$ dès lors que $\alpha \neq -1$.

✘ Attention !

Même si l'intégrale $\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$ est fausse-ment impropre en 0, il demeure que l'IPP se fait toujours sur un segment ! On attend donc ici de travailler sur l'intégrale partielle...

$$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - (1+A)^{\frac{3}{2}}A^{-x}) + \frac{2x}{3}\int_A^1 t^{-x-1}(1+t)\sqrt{1+t}\,dt$$

↙ linéarité de l'intégrale

$$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - (1+A)^{\frac{3}{2}}A^{-x}) + \frac{2x}{3}\int_A^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt + \frac{2x}{3}\int_A^1 t^{-x}t\sqrt{1+t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - (1+A)^{\frac{3}{2}}A^{-x}) + \frac{2x}{3}\int_A^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt + \frac{2x}{3}\int_A^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt$$

Or :

- $-x > 0$, donc $\lim\limits_{A\to 0} \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}} - (1+A)^{\frac{3}{2}}A^{-x}) = \frac{2\times 2^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}$
- $\lim\limits_{A\to 0}\int_A^1 t^{-x-1}\sqrt{1+t}\,dt = f(x+1)$
- $\lim\limits_{A\to 0}\int_A^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,dt = f(x)$

D'où en faisant tendre $A \to 0$, on obtient :

$$f(x) = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3} + \frac{2x}{3}f(x) + \frac{2x}{3}f(x+1)$$

Ainsi :

$$f(x+1) = \frac{(3-2x)f(x) - 2^{\frac{5}{2}}}{2x}$$

Conclusion : $\forall x < 0,\ f(x+1) = \frac{(3-2x)f(x) - 4\sqrt{2}}{2x}$.

5.c. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.
Pour cela, déterminons un équivalent de $f(x+1)$ lorsque $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(3-2x)f(x) - 4\sqrt{2} = 3f(0) - 4\sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2} - 2 - 4\sqrt{2}$$
$$= -2$$

↙ question 5.a.

☞ **Rappel...**
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et que $\ell \notin \{0; \pm\infty\}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

D'où :

$$\frac{(3-2x)f(x) - 4\sqrt{2}}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{x}$$

On a ainsi :

$$f(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-1}{x}$$

Par conséquent :

$$f(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{-1}{z-1}$$

Conclusion : $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

6. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

