EDHEC 2007 E
Exercice 3

Énoncé

1. Montrer : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$.

On considère alors la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. 2.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$.
   3.b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
4. Étudier le signe de $f(x)$.
5. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   5.a. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer ses variations.
   5.b. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$.
   5.c. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est divergente puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Corrigé

1. Montrer : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$.

Considérons la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

Réflexe !

D'où :

x	0		-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g(x) \geqslant 1$$

Conclusion : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$.

Remarque

Ou alors :
La fonction ln est concave, donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier celle en l'abscisse 1, d'équation $y = x - 1$. D'où :

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1$$

En particulier :

$$\forall x > 0,\ \ln(x) < x$$

On considère alors la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. 2.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- En 0 à droite :
Pour $x > 0$, suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} \end{aligned}$$

x proche de 0, donc $\ln(x) \neq 0$

Or, par opérations sur les limites :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -1 = f(0)$$

Par conséquent, f est continue en 0 (à droite).

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

✘ Attention !

Pas de croissances comparées ici ! Pour rappel, mentionner un argument inutile est pénalisant.

2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

Soit $h > 0$, suffisamment proche de 0. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\frac{\ln(h)}{h - \ln(h)} - (-1)}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{h - \ln(h)}}{h} \\ &= \frac{1}{h - \ln(h)} \end{aligned}$$

Or, par opérations :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1}{h - \ln(h)} = 0$$

Conclusion : f est dérivable (à droite) en 0 et $f'_d(0) = 0$.

☞ Rappel...

Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel a.
On dit que f est dérivable en a lorsque la limite quand $h \to 0$ du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.
Le cas échéant, on note

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De façon équivalente, on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout x$\in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\left(x - \ln(x)\right) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \ln(x)\right)^2}$$
$$= \frac{1 - \ln(x)}{\left(x - \ln(x)\right)^2}$$

3.b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Soit $x > 0$, suffisamment proche de $+\infty$.
On a :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$$
$$= \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

Réflexe !
En $+\infty$, on remarque une FI ; on factorise donc numérateur et dénominateur par le terme dominant pour chaque...

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1 - \ln(x)}{\left(x - \ln(x)\right)^2}$$
$$\iff 1 - \ln(x) > 0 \quad \text{(} \left(x - \ln(x)\right)^2 > 0 \text{)}$$
$$\iff \ln(x) < \ln(e)$$
$$\iff x < e \quad \text{(stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}^{+*}\text{)}$$

D'où :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0

4. Étudier le signe de $f(x)$.
On a

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$$

Or, d'après la question 1. :

$$\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

5. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Important !
C'est bien la continuité de f suer $\mathbb{R}^+$ qu'il nous faut ici, et pas seulement sur le segment $[0; x]$ (on ne quantifie d'ailleurs pas de $x \in \mathbb{R}^+$ pour dire que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$).
La continuité de l'intégrande sur le segment d'intégration est examinée seulement lorsque l'on demande de justifier l'existence de l'intégrale.

5.a. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer ses variations.
D'après la question 2.a., f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, par théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) = f(x)$$

D'où, d'après la question précédente :

x	0		-1		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	0	$-$	0	$+$	
F	0	↘	$F(1)$	↗	

Plus généralement...

Si on doit traiter une intégrale du type $\int_0^{v(x)} h(t)dt$, *ou* $\int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt$, *avec* u *et* v *des fonctions de classe* $\mathscr{C}^1$, *on procède ainsi :*

Puisque h est continue sur J, elle admet des primitives qui sont $\mathscr{C}^1$ sur J. Notons H l'une d'elles.
Par conséquent, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt \\ &= H\big(v(x)\big) - H\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

Or :

- ✓ u est $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans J,
- ✓ H est $\mathscr{C}^1$ sur J.

Donc, par composition, $H \circ u$ est $\mathscr{C}^1$ sur I ; de même, $H \circ v$ est $\mathscr{C}^1$ sur I.
Ainsi, F est $\mathscr{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= v'(x)H'\big(v(x)\big) - u'(x)H'\big(u(x)\big) \\ &= v'(x)h\big(v(x)\big) - u'(x)h\big(u(x)\big) \end{aligned}$$

✘ Attention !
On rédige et on dérive ensuite parfaitement tout ce travail avec les composées !

5.b. Étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$.

- La fonction $t \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $B \in [1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int_1^B \frac{1}{x} \ln(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(x)^2\right]_1^B \\ &= \frac{\ln(B)^2}{2} \end{aligned}$$

★ Classique ! ★
Il faut primitiver $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sans hésiter : cette fonction est de la forme $u'u$...

Or $\lim\limits_{B\to+\infty} \frac{\ln(B)^2}{2} = +\infty$. Ainsi

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{\ln(x)}{x} dx = +\infty$$

Conclusion : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ est divergente.

5.c. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est divergente puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

- ∗ La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- ∗ Par croissances comparées :

$$\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$$

D'où :

$$x - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

On a ainsi :

- ✓ $\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x}$
- ✓ $\forall x \geqslant 1,\ \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \geqslant 0,\ \frac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$
- ✓ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ est divergente d'après la question précédente.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} dx$ est divergente.

☞ Rappel...
$f \sim g \iff f = g + o(f) \iff f = g + o(g)$

- Pour tout $x > 1$, par relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$$

Or :

* $\int_0^1 f(t)dt$ n'est pas impropre, car f est continue sur le segment $[0;1]$;
* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente (d'après le point précédent) et il s'agit d'une intégrale à intégrande positive ;

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt = +\infty$$

Conclusion : par opération : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Remarque

On peut procéder un peu différemment aussi...
On sait que F est croissante sur $[1;+\infty[$. Donc par théorème de limite monotone, F admet une limite en $+\infty$.
Si F possédait une limite finie en $+\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ serait convergente, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ également, ce qui n'est pas le cas !