EDHEC 2004 S

Exercice 2

Énoncé

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$.

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$.
3. 3.a. Justifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)}$ est convergente.
   On notera $g(x)$ sa valeur.

   3.b. Pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $t \in [1;+\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$ puis établir que :
   $$\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$$

   3.c. En déduire :
   $$\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(2)}{x}$$
   puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. 4.a. Montrer que :
   $$\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}$$

   4.b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Corrigé

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$.

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour commencer, $f(x)$ existe si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$ est convergente.

- Si $x > 0$:
  - ✓ Dans ce cas, $x+1>1$ et donc $1+t+t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x+1}$. D'où : $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$.
  - ✓ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \geqslant 0\ ;\ \dfrac{1}{t^{x+1}} \geqslant 0$
  - ✓ puisque $x+1>1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente.

  Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$ est convergente.
- Si $x < 0$:
  - ✓ Dans ce cas, $x+1<1$ et donc $1+t+t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} t$. D'où $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.
  - ✓ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \geqslant 0\ ;\ \dfrac{1}{t} \geqslant 0$
  - ✓ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente.

  Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,dt$ est divergente.
- Si $x = 0$:

  Dans ce cas $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$. Puis on conclut comme dans le cas $x<0$.

Conclusion : $f(x)$ existe si, et seulement si, $x > 0$. Autrement dit, l'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$.

✘ Attention !
Il faut bien distinguer la question "démontrer que f est définie sur $]0;+\infty[$" de la question présente dans l'exercice.
Celle de l'exercice nécessite de dire que f n'est pas définie sur $]-\infty;0]$; pas celle de la remarque.

Sur les ensembles de définition des fonctions...

1# *Trouver l'ensemble de définition d'une fonction f, c'est déterminer tous les réels x pour lesquels f(x) existe.*
On rédige souvent ainsi :
"Notons $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff \big(f(x) \text{ existe}\big)$$
$$\iff \ldots$$

D'où $\mathscr{D}_f = \ldots$."

2# **Attention !** "Démontrer que f est définie sur $]0;+\infty[$." $\neq$ "Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$."
En effet, la première formulation demande seulement d'établir que si $x>0$, alors $f(x)$ existe.
La seconde formulation demande de démontrer que $f(x)$ existe si, et seulement si, $x>$. Autrement dit, la première formulation ne fait que demander d'établir l'inclusion $]0;+\infty[\subset \mathscr{D}_f$ alors que la seconde demande l'égalité.

2. Démontrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Soient $x, y \in]0;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
x \leqslant y &\implies x+1 \leqslant y+1 \\
&\implies \forall t \geqslant 1,\ (x+1)\ln(t) \leqslant (y+1)\ln(t) && \text{(}\forall t \geqslant 1,\ \ln(t) \geqslant 0\text{)} \\
&\implies \forall t \geqslant 1,\ \exp\big((x+1)\ln(t)\big) \leqslant \exp\big((y+1)\ln(t)\big) && \text{(croissance de exp sur } \mathbb{R}\text{)} \\
&\implies \forall t \geqslant 1,\ 1+t+t^{x+1} \leqslant 1+t+t^{y+1} \\
&\implies \forall t \geqslant 1,\ \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^{y+1}} && \text{(décroissance de } \tfrac{1}{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}\text{, licite car les deux membres sont dans } \mathbb{R}^{+*}\text{)} \\
&\implies f(x) \geqslant f(y) && \text{(en intégrant sur } [1;+\infty[\text{, licite car les deux intégrales convergent et par croissance de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

✍ Rédaction
C'est un bon usage du symbole " $\implies$ ".

♥ Conseil du chef ♥
On repasse à l'écriture avec exp et ln pour éviter de se tromper sur le sens des inégalités...
Attention en revanche, il ne s'agit pas d'appliquer une quelconque fonction puissance car l'exposant n'est pas le même des deux côtés.

♣ Méthode !
On revient à la définition de fonction décroissante car il nous est impossible de dériver f (est-elle dérivable d'ailleurs ?!).

Ou alors...

Soient $x, y \in]0;+\infty[$. Supposons que $x \leqslant y$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) &= \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t+t^{x+1}}-\frac{1}{1+t+t^{y+1}}\right)dt \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1+t+t^{y+1}-1-t-t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})(1+t+t^{y+1})}dt \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{t^{y+1}-t^{x+1}}{(1+t+t^{x+1})(1+t+t^{y+1})}dt \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{t^{x+1}(t^{y-x}-1)}{(1+t+t^{x+1})(1+t+t^{y+1})}dt \end{aligned}$$

RÉFLEXE !

Or, $x \leqslant y$, donc

$$y-x \geqslant 0$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 1$, puisque $\ln(t) \geqslant 0$:

$$(y-x)\ln(t) \geqslant 0$$

D'où par croissance de exp sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \geqslant 1,\ t^{y-x} \geqslant 1$$

Par conséquent :

$$\forall t \geqslant 1,\ \frac{t^{x+1}(t^{y-x}-1)}{(1+t+t^{x+1})(1+t+t^{y+1})} \geqslant 0$$

Par croissance de l'intégrale, licite car $(1 \leqslant +\infty)$, il vient :

$$f(x)-f(y) \geqslant 0$$

D'où

$$f(x) \geqslant f(y)$$

Conclusion : f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

3. 3.a. Justifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^x)}$ est convergente.

On notera $g(x)$ sa valeur.

Soit $x > 0$.

✓ Dans ce cas $1+t^x \underset{t\to+\infty}{\sim} t^x$. D'où :

$$\frac{1}{t(1+t^x)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$$

✓ $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{1}{t(1+t^x)} \geqslant 0$; $\dfrac{1}{t^{x+1}} \geqslant 0$

✓ puisque $x+1 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t^x)}dt$ est convergente.

Remarque

Et encore un critère... Un peu répétitif l'exercice, non ?

3.b. Pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $t \in [1;+\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t}-\dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$ puis établir que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) = \frac{\ln(2)}{x}$$

- Soient $x \in]0;+\infty[$ et $t \in [1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}-\frac{t^{x-1}}{1+t^x} &= \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} \\ &= \frac{1}{1+t^x} \end{aligned}$$

- Soit $x > 0$.
  Soit $B \in [1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{dt}{t(1+t^x)}dt &= \int_1^B\left(\frac{1}{t}-\frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right)dt \\ &= \Big[\ln(|t|)-\frac{1}{x}\ln(|1+t^x|)\Big]_1^B \\ &= \ln(B)-\frac{1}{x}\ln(1+B^x)+\frac{\ln(2)}{x} \\ &= \ln(B)-\frac{1}{x}\ln\left(B^x\left(1+\frac{1}{B^x}\right)\right)+\frac{\ln(2)}{x} \qquad ! \\ &= \ln(B)-\frac{1}{x}\ln(B^x)-\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{B^x}\right)+\frac{\ln(2)}{x} \end{aligned}$$

$B^x > 0$ et $1+\frac{1}{B^x} > 0$

$B > 0$

✘ Attention !

Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t^x}dt$ ne sont pas convergentes ! Il est donc nécessaire de repasser aux intégrales partielles...

$$= \ln(B) - \frac{1}{x}x\ln(B) - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{B^x}\right) + \frac{\ln(2)}{x}$$
$$= -\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{B^x}\right) + \frac{\ln(2)}{x}$$

Or $x > 0$, donc $\lim\limits_{B\to+\infty} B^x = +\infty$ et ainsi :

$$\lim_{B\to+\infty} -\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{B^x}\right) = 0$$

D'où :

$$\lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{1}{t(1+t^x)}dt = \frac{\ln(2)}{x}$$

Conclusion : $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{\ln(2)}{x}$.

3.c. En déduire :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(2)}{x}$$

puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\forall t \geqslant 1,\ 1+t+t^{x+1} \geqslant t+t^{x+1} > 0$$

D'où, par décroissance de $\dfrac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall t \geqslant 1,\ \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \frac{1}{t+t^{x+1}}$$

Ainsi :

$$\forall t \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \frac{1}{t(1+t^x)}$$

D'où, en intégrant sur $[1;+\infty[$, licite car les deux intégrales en jeu sont convergentes et, par croissance de l'intégrale $(1 \leqslant +\infty)$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Conclusion : d'après la question précédente, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln(2)}{x}$$

- Immédiat par théorème d'encadrement...

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Remarque

En toute rigueur, l'énoncé devrait demander "Démontrer que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer."
Le théorème d'encadrement fournit à la fois existence et valeur, donc pas de changement sur la réponse... On pourrait cependant dire que f est monotone sur $]0;+\infty[$ (décroissante) donc par théorème de limite monotone, elle admet une limite en 0 à droite et en $+\infty$.

4. **4.a.** Montrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

- De la question précédente, on a déjà :

$$0 \leqslant \frac{\ln(2)}{x} - f(x)$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(2)}{x} - f(x) &= g(x) - f(x)\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^{x+1}}dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^{x+1}}dt \qquad \text{linéarité de l'intégrale}\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1+t+t^{x+1}-t-t^{x+1}}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}dt\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}dt\end{aligned}$$

Or :

$$\forall t \geqslant 1,\ \frac{1}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})} \leqslant \frac{1}{t^{2x+2}}$$

♣ Indication...

On veut une majoration qui contient encore x et dont on pourra calculer l'intégrale. On teste la plus évidente, si ça ne fonctionne pas, on change.

D'où, en intégrant sur $[1;+\infty[$, licite car les deux intégrales en jeu sont convergentes (la deuxième car $x>0$, donc $2x+2>1$: intégrale de Riemann...) et par croissance de l'intégrale ($1 \leqslant +\infty$) :

$$\frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x+2}}dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x+2}}dt &= \int_1^{+\infty} t^{-2x-2}dt && \text{↘ } -2x-2 \neq -1 \\
&= \left[\frac{t^{-2x-1}}{-2x-1}\right]_1^{t\to+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(-2x-1)t^{2x+1}} - \frac{1}{-2x-1} && \text{↘ } 2x+1>0, \text{ donc } \lim_{t\to+\infty} t^{2x+1} = +\infty \\
&= \frac{-1}{-2x-1} \\
&= \frac{1}{2x+1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Rédaction

Rédaction autorisée seulement si la convergence a déjà établie.

Conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 \leqslant \frac{\ln(2)}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}$.

4.b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

✓ De la question précédente, on a :

$$\forall x>0,\ 0 \leqslant 1 - \frac{f(x)}{\frac{\ln(2)}{x}} \leqslant \frac{x}{\ln(2)(2x+1)}$$

✓ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2)(2x+1)} = 0$.

D'où par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \frac{f(x)}{\frac{\ln(2)}{x}} = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{\ln(2)}{x}} = 1$$

Conclusion : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ln(2)}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.